# Anbefalte oppgaver uke 13, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

23. mars 2020

Nummererte oppgaver er hentet fra læreboken *Calculus 2*, 9.utgave av Adams og Essex.

## Oppgaver til plenumsregning:

- 16.4.3: finn fluksen til $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.
- 16.4.15: et legeme $R$ med konstant massetetthet har volum $V$ og massesenter i $\mathbf{r}_{\text{cm}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Finn fluksen til

  $$\mathbf{F} = (x^2 - x - 2y)\mathbf{i} + (2y^2 + 3y - z)\mathbf{j} - (z^2 - 4z + xy)\mathbf{k}$$

  ut av $R$ gjennom overflaten til $R$ uttrykt ved $V$ og $\mathbf{r}_{\text{cm}}$.
- Eksamen våren 2015, oppgave 5: beregn fluksintegralet

  $$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

  der vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

  $$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^2 + ye^y, 3y^2, z),$$

  der $\mathcal{S}$ er den øvre halvsfæren definert av $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv $\mathbf{k}$-komponent.
- Eksamen sommeren 2012, oppgave 6 a) og b): legemet $T$ er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$.

  a) Finn volumet til $T$.

---

b) La $\mathcal{S}$ være den delen av overflaten til $T$ som ligger på paraboloiden og la $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker ut av legemet $T$. La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet definert ved:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}.$$

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS.$$

- Eksamen sommeren 2014, oppgave 6 b): halvkulen $T$ er bestemt av $x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0$. Vi lar $\mathcal{S}$ være den krumme delen av overflaten til $T$.

  b) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

  $$\mathbf{F}(x,y,z) = x(z+z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y+1)\mathbf{k}.$$

  Regn ut div($\mathbf{F}$) og finn fluksen

  $$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS$$

  der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren med positiv $z$-komponent.

- 16.4.19: la $D$ være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til $D$ med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at for alle glatte vektorfelt $\mathbf{F}$ så gjelder:

  $$\oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{curl}(\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = 0.$$

## Oppgaver med løsningsforslag:

- **Fluks til konstant vektorfelt**: vis at fluksen til et konstant vektorfelt gjennom en lukket glatt og orientert flate i rommet alltid er 0.
- Eksamen sommeren 2003, oppgave 6, a) og b).
- Eksamen 1998, oppgave 5.
- Eksamen sommeren 2000, oppgave 6.

- 16.4.1: finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.

- 16.4.20: la $D$ være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til $D$ med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at volumet til $D$ er gitt ved

$$V = \frac{1}{3} \oiint_{\mathcal{S}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

  *Ekstra spørsmål:* kunne vi erstattet integranden med et annet vektorfelt og kontstanten 1/3 med noe annet?

- 16.4.27: la $D$ være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til $D$ med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. La $\phi, \psi$ være glatte skalarfelt og la $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ betegne den retningsderiverte til $\phi$ i retningen av $\hat{\mathbf{N}}$. Vis at

$$\iiint_D \Delta\phi\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS$$

  der $\Delta\phi = \nabla^2\phi$ betegner Laplacen til $\phi$.

- 16.4.28: samme antakelser som i 16.4.27. Vis nå at (dette er en såkalt *Green type formel*):

$$\iiint_D (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \left( \phi\frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)\, dS$$

- 16.4.29: samme antakelser som i 16.4.28. Vis at

$$\iiint_D \nabla\phi\, dV = \oiint_{\mathcal{S}} \phi\hat{\mathbf{N}}\, dS$$

  ved å anvende divergensteoremet på $\mathbf{F} := \phi\mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er et vilkårlig konstant vektorfelt.