Anbefalte oppgaver uke 12, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

16. mars 2020

Nummererte oppgaver er hentet fra lærerboken *Calculus 2*, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning:

- **Divergensteorem i planet**: vis at Green's teorem gir divergensteoremet i planet:

$$\iint_R \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds,$$

  der $\mathcal{C} = \partial R$ er randen til området $R \subseteq \mathbb{R}^2$, og der $\hat{\mathbf{N}}$ er *utadpekende* enhetsnormalvektor til $\mathcal{C}$ gitt ved enhetstangentvektor $\hat{\mathbf{T}}$ rotert 90 grader *med* klokken. Vi antar at alle involverte vektorfelt er glatte og også at $\mathcal{C}$ er glatt.

- 16.3.1: evaluer $\oint_{\mathcal{C}} (\sin x + 3y^2)\, dx + (2x - e^{-y^2})\, dy$ der $\mathcal{C}$ er randen til halvdisken $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$ orientert mot klokken.

- 16.3.5: bruk et linjeintegral til å finne arealet av det plane området omringet av kurven $\mathbf{r} = a\cos^3 t\mathbf{i} + b\sin^3 t\mathbf{j}$ med $0 \leq t \leq 2\pi$.

- Eksamen våren 2013, oppgave 6:

  (a) vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}, \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

  er curlfritt (det vil si $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 0$ for alle $(x, y) \neq (0, 0)$).

(b) La $\mathcal{C}$ betegne kurven i xy-planet som starter i $(1, 0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ nøyaktig én gang, der $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken. Regn ut:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds$$

og avgjør hvorvidt $\mathbf{F}$ er konservativt. Begrunn svaret.

Oppgaver med løsningsforslag:

- **To viktige identiteter**: Anta uendelig glatthet for alle involverte funksjoner f og vektorfelt $\mathbf{F}$. Vis at vi da alltid har:

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) = \mathbf{0}$$
$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) = 0.$$

- Eksamen sommeren 2016, oppgave 7.
- Eksamen våren 2012, oppgave 5.
- 16.1.3: finn divergensen og curl til $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.
- 16.1.9: finn divergensen og curl til $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta) = r\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, der (r, θ) er polarkoordinater.
- 16.1.13: la $\mathbf{F}$ være et glatt to-dimensjonelt vektorfelt. Hvis $\mathcal{C}_\varepsilon$ er sirkelen med radius ε sentrert i origo og $\hat{\mathbf{N}}$ er den utadpekende enhetsnormalen til $\mathcal{C}_\varepsilon$, vis at

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \operatorname{div}(\mathbf{F})(0, 0).$$

- 16.2.9: la $\mathbf{r} = (x, y, z), r := |\mathbf{r}|$. Anta at f er en differensierbar funksjon av én variabel. Vis at

$$\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = rf'(r) + 3f(r).$$

  Finn $f(r)$ hvis $f(r)\mathbf{r}$ er divergensfritt?