Anbefalte oppgaver uke 11, TMA4105
Matematikk 2, våren 2020

9. mars 2020

Nummererte oppgaver er hentet fra lærerboken *Calculus 2*, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning:

- 15.5.3: finn arealet av den delen av planet $Ax + By + Cz = D,\ C \neq 0$ som ligger inne i den elliptiske sylinderen $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.
- 15.5.17: finn den totale ladningen på flaten

  $$\mathbf{r} = (e^u \cos v, e^u \sin v, u), \qquad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi)$$

  når ladningstettheten er gitt ved $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$.
- **Fluksintegral:** la $\mathcal{S}$ være den øvre halvdelen ($z \geq 0$) av kuleflaten med radius 1 og sentrum i origo, og la $\mathbf{N}$ være enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker vekk fra origo. Regn ut

  $$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

  der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

  $$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$
- **Divergensteorem (eksempel)**: betrakt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Hva er fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom sfæren sentrert i origo med radius R? Sammenlikn med volumet til kula (sfæren er randen til kula) og størrelsen $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ der vi skriver $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.
- 15.6.13: finn fluksen av $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ ut av (hele) flaten til kuben gitt ved $-a \leq x, y, z \leq a$. Du kan få bruk for integralet (ikke i boka):

  $$\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2 + v^2}^3}\, du\, dv = \frac{2\pi}{3a}.$$
- 15.6.17: la $\mathbf{N}$ være den utadpekende enhetsnormalen til en glatt og orientert flate $\mathcal{S}$ i rommet. Vis at fluksen til $\mathbf{N}$ ut av $\mathcal{S}$ er arealet av $\mathcal{S}$.

Oppgaver med løsningsforslag:

- 15.5.2: verifiser at flateelementet (arealelemetet) dS til den sfæriske flaten $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ er gitt i sfæriske koordinater ved $dS = a^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$.
- 15.5.7: finn $\iint_{\mathcal{S}} x \, dS$ over den delen av den parabolske sylinderen $z = x^2/2$ som ligger inne i første oktant av sylideren $x^2 + y^2 = 1$.
- 15.5.13: finn $\iint_{\mathcal{S}} y \, dS$ der $\mathcal{S}$ er den delen av planet $z = 1 + y$ som ligger inne i kjeglen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.
- 15.5.15: finn $\iint_{\mathcal{S}} xz \, dS$ der $\mathcal{S}$ er den delen av flaten $z = x^2$ som ligger i første oktant inne i paraboloiden $z = 1 - 3x^2 - y^2$.
- 15.6.1: finn fluksen til $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j}$ ut av tetraederet begrenset av koordinatplanene og planet $x + 2y + 3z = 6$.
- Eksamen våren 2004, oppgave 3.
- Eksamen sommeren 2009, oppgave 4.