Anbefalte oppgaver uke 10, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

2. mars 2020

Nummererte oppgaver er hentet fra lærerboken *Calculus 2*, 9.utgave av Adams og Essex.

Oppgaver til plenumsregning:

- **Konservative vektorfelt**: vis at hvis $\mathbf{F}$ er et kontinuerlig vektorfelt som har uavhengig-av-vei-egenskapen i et åpent sammenhengende område $D \subseteq \mathbb{R}^3$, så er $\mathbf{F}$ konservativt.

  Bemerkning: at $\mathbf{F}$ har uavhengig-av-vei-egenskapen betyr at linjeintegralet $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ kun er avhengig av endepunktene til γ og uavhengig av selve kurven γ i seg selv.

  Hint: det holder å vise at en mulig potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ er på formen $\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in D$ og integralet er over en vilkårlig kurve som forbinder $\mathbf{a}$ og $\mathbf{x}$.

- Eksamen våren 2019, oppgave 8: vis at vektorfeltet

  $$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$$

  er konservativt. Regn ut

  $$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

  der $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved

  $$\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

- Eksamen våren 2007, oppgave 5: regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

der

$$\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{i} \sin x + \mathbf{j} \sin(y^2)$$

og C er kurven parametrisert ved

$$C: \qquad x = t, \qquad y = t^3 - t, \qquad\qquad 0 \le t \le 1.$$

- 15.1.15: bestem strømlinjene til hastighetsfeltet gitt ved $\mathbf{v}(x,y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

- 15.4.21: hvis f og g er skalarfelt med kontinuerlige førsteordens partielle deriverte i et sammenhengende område D, vis at

$$\int_{\mathcal{C}} f \nabla g \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} g \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(Q)g(Q) - f(P)g(P)$$

for alle stykkevis glatte kurver i D fra P til Q.

Oppgaver med løsningsforslag:

- 15.1.3: skisser vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ i planet og bestem dets feltlinjer.

- 15.2.3: avgjør om vektorfeltet er konservativt, og hvis ja, finn en tilhørende potensialfunksjon:

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

- 15.2.5: samme som i 15.2.3, men med vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} - (2zx - y^2)\mathbf{k}.$$

- 15.2.7: finn det 3-dimensjonale vektorfeltet med potensial

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}.$$

- 15.2.9: vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$$

  er konservativt og finn en potensialfunksjon til denne. Beskriv ekvipotensialflatene og finn feltlinjene.

- 15.3.2: regn ut $\int_{\mathcal{C}} y\, ds$ der $\mathcal{C}$ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^2), 0 \leq t \leq m$.

- 15.3.15: la $\mathcal{C}$ være den delen av skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ som ligger i første oktant. Regn ut $\int_{\mathcal{C}} x\, ds$.

- 15.4.17: regn ut de lukkede kurveintegralene

  (a) $\oint_{\mathcal{C}} x\, dy$,

  (b) $\oint_{\mathcal{C}} y\, dx$,

  langs $\mathcal{C}$ gitt som randen av den øvre halvdisken $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$, orientert mot klokka.