

Oppgave 1 Alternativ (iii) er *ikke* et uttrykk for volumet av T . Dette alternativet gir volumet av et legeme som ligger mellom flatene $z = 0$ og $z = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, og som ellers er avgrenset av $x = 0$, $y = 1$ og $y = \sqrt{x}$, altså ikke slik T er beskrevet.

Alternativene (i) og (iv) uttrykker det samme, bare integrasjonsrekkefølgen i x - og y -retning er byttet om. Alternativ (i) fås fra (ii) ved å substituere x i (ii) med $\frac{\pi}{2}x$. Alternativ (v) framkommer ved å ta integralet over hele rektanglet $[0, 1] \times [0, 1]$, som gir $\frac{2}{\pi}$, og så trekke fra integralet over området som er avgrenset av $x = 0$, $y = 1$ og $y = x^2$. Direkte utregning av alle integralene som gir samme verdi, gir at volumet til T er lik $8(\pi - 2)/\pi^3$.

Vurdering: 10 poeng for korrekt valg. 0 poeng for galt valg.

Oppgave 2 Påstand (ii) er *ikke* sann.

Direkte utregning gir at $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ og $\operatorname{div} \mathbf{G} = 2$. Divergensteoremet i planet gir da at $\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = 0$, mens $\oint_C \mathbf{G} \cdot \widehat{\mathbf{N}} ds = 2 \iint_D dA = 2 \cdot (\text{Arealet av } D) = \pi$. Dette viser også at påstand (v) er sann. Direkte utregning gir $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{G} = 2\mathbf{k}$, så (iii) er sann, og ut fra Greens teorem er da også (iv) sann. Utregning ved Greens teorem gir $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_D dA = 2 \cdot (\text{Arealet av } D) = \pi$, så (i) er sann.

Vurdering: 10 poeng for korrekt valg. 0 poeng for galt valg.

Oppgave 3

(i) $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon E.

(ii) $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon B.

(iii) $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon D.

(iv) $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon C.

(v) $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til illustrasjon A.

En måte å se denne sammenhengen på er å se på fortegnet til vektorfeltenes komponenter. La $\mathbf{F}(x, y)$ være gitt som $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$. Da kan man tenke seg fire tilfeller: (1) Både F_1 og $F_2 > 0$: Da vil vektorpilene peke oppover og til høyre. (2) Både F_1 og $F_2 < 0$: Da vil vektorpilene peke nedover og til venstre. (3) $F_1 > 0$ og $F_2 < 0$: Da vil vektorpilene peke nedover og til høyre. (4) $F_1 < 0$

og $F_2 > 0$: Da vil vektorpilene peke oppover og til venstre. I tillegg kommer at i hvert av tilfellene kan F_1 eller F_2 være lik 0. Det gir vektorpiler som er henholdsvis vertikale og horisontale.

Ved å bruke dette får vi at $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til (1) i første kvadrant, (4) i andre kvadrant, (3) i tredje kvadrant og (2) i fjerde kvadrant. Det passer med illustrasjon E. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ svarer til (1) i hele planet, noe som passer med illustrasjon B. Det er den eneste illustrasjonen der alle pilene peker oppover og til høyre. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til (1) i første og fjerde kvadrant, (2) i andre og tredje kvadrant. Her kan vi også legge merke til at $F_2/F_1 = 1/2$, så alle vektorpilene er parallelle. Dette finner vi kun i illustrasjon D. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ svarer til (1) når $-x < y < x$, (2) når $x < y < -x$, (3) når $-y < x < y$ og (4) når $y < x < -y$. Her blir altså planet oppdelt i fire områder avgrenset av linjene $y = x$ og $y = -x$. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ svarer til (3) i første kvadrant, (2) i andre kvadrant, (4) i tredje kvadrant og (1) i fjerde kvadrant.

Vurdering: 2 poeng hvert korrekte valg. 0 poeng for gale valg.

Oppgave 4 La $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = x\mathbf{j}$. Da blir $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. La D betegne området innenfor ellipsen og la C betegne randa til D , altså selve ellipsekurven. Ved Greens teorem får vi da

$$A = \iint_D dx dy = \oint_C x dy = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

Vurdering: Her må det gå fram av svaret hvordan Greens teorem brukes for å gå over fra et dobbeltintegral til et linjeintegral. Det er flere måter å gjøre dette på, f.eks. i Greens teorem å velge $P = 0$ og $Q = x$ som ovenfor. Max 10 poeng.

Oppgave 5 Utregning av gradienten gir

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}}, \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}} \right)_{(x,y)=(1,1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right).$$

Tangenten til $y = x^2$ i punktet $(1, 1)$ kan uttrykkes som $y = 2x - 1$, så \mathbf{u} har samme retning som vektoren $(1, 2)$. Siden \mathbf{u} skal være en enhetsvektor får vi $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. Videre får vi

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \cdot (1, 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vurdering: Her skal svaret bestå av uttrykket $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ og verdien til den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 5 poeng for hvert riktig svar.

Oppgave 6 Ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen får vi

$$I = \int_{-3}^2 \int_{y^2}^{6-y} f(x, y) dx dy.$$

Verdien til I kan tolkes som volumet av et legeme som er avgrenset av flatene $z = 0$, $z = f(x, y)$, og videre av $x = y^2$ og $x = 6 - y$.

Vurdering: Uttrykket $I = \int_{-3}^2 \int_{y^2}^{6-y} f(x, y) dx dy$, eventuelt en beskrivelse med ord av hvilke grenser som er satt for x og y må være med. Videre må det være med at I kan tolkes som volumet av et legeme som er avgrenset av flatene $z = 0$, $z = f(x, y)$, og videre av $x = y^2$ og $x = 6 - y$. Max 10 poeng. Uttrykket for I teller mest.

Oppgave 7 Utregning gir

$$\mathbf{r}'(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}.$$

Dermed er $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5}t$ og enhetstangentvektor blir $\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos t, \sin t, 2)$. Utregnet i punktet gitt ved $t = \pi/2$ får vi $\hat{\mathbf{T}}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$. Lengden L av \mathcal{C} blir

$$L = \int_0^\pi |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{5} \int_0^\pi t dt = \frac{\sqrt{5}}{2} \pi^2.$$

Vurdering: Her bør det skrives at man har regnet ut den deriverte til $\mathbf{r}(t)$, delt på lengden til denne for å få en enhetsvektor og så satt inn $t = \pi/2$. Uttrykket for $\mathbf{r}'(t)$ og uttrykket for lengden av denne er relevante mellomsvar. Verdien $\hat{\mathbf{T}}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$ må være med. Når det gjelder buelengden så bør man skrive at man har regnet ut integralet av $|\mathbf{r}'(t)|$ fra 0 til π og fått svaret $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2$. Hvis det er enklere å skrive opp selve uttrykkene enn å beskrive med ord, kan man gjøre det.

Oppgave 8 Utregning gir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} - 2 \right) \text{ og} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y-1}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Merk at de partielle deriverte ikke er definert i punktet $(2, 1)$, så dette er et singulært punkt, og dermed ikke et kritisk punkt. I det videre antar vi at $(x, y) \neq (2, 1)$. Vi får at $\partial f/\partial x = 0$ når $x = 2$ og når $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{1}{2}$ og $\partial f/\partial y = 0$ når $y = 1$. Kritiske punkter (begge de partielle deriverte lik 0) får vi da når $(x-2)^2 = \frac{1}{4}$ og $y = 1$, dvs. i punktene $(\frac{5}{2}, 1)$ og $(\frac{3}{2}, 1)$. Utregning gir $f(\frac{5}{2}, 1) = f(\frac{3}{2}, 1) = \frac{17}{4}$. For å bestemme maksimums- og minimumsverdier må vi ta hensyn både til de kritiske punktene og til det singulære punktet. I tillegg må vi undersøke randa til D . På randa til D er $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, så her kan $f(x, y)$ skrives $f(x, y) = 1 + 4x - x^2 := g(x)$. $g(x)$ har sin største verdi når $x = 2$ og sin minste verdi når $x = 1$ eller $x = 3$. Dermed får vi at største verdi på randa blir $f(2, 2) = f(2, 0) = 5$, og at minste verdi blir $f(1, 1) = f(3, 1) = 4$. Utregning av f i det singulære punktet gir $f(2, 1) = 4$.

Ved å sammenligne funksjonsverdiene vi har fått i alle de aktuelle punktene får vi:

- Den absolutte maksimumsverdien for f i D er 5 og den antas i punktene $(2, 2)$ og $(2, 0)$.
- Den absolutte minimumsverdien for f i D er 4 og den antas i punktene $(1, 1)$, $(3, 1)$ og $(2, 1)$.

Vurdering: Her bør man skrive at man har regnet ut gradienten til f og funnet når den er lik $(0, 0)$. De punktene man da får, må være med for disse er de kritiske punktene. Så må det sies at man har undersøkt f på randa til D og funnet de største og minste verdiene på randa og hvilke punkter de antas i. Relevante mellom svar vil være å skrive opp funksjonsverdiene i alle de aktuelle punktene: de kritiske punktene, det singulære punktet, og max/min-punktene på randa. Så bør det sies at ved å sammenligne alle disse funksjonsverdiene bestemmes absolutt max og absolutt min i D . Så angis maks- og min-verdier og de tilhørende punktene. Max 10 poeng.

Oppgave 9 \mathcal{S} kan parametriseres ved $z = f(x, y) = 4 - x^2$. Enhetsnormalvektoren til \mathcal{S} med positiv z -komponent kan da uttrykkes som

$$\widehat{\mathbf{N}} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{(2x, 0, 1)}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Med $dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$ får vi da $\widehat{\mathbf{N}} dS = (2x, 0, 1) dx dy$

Dette gir

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS &= \iint_D (x, y, 4 - x^2) \cdot (2x, 0, 1) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (4 + x^2) dy dx = \int_0^2 (16 - x^4) dx = \frac{128}{5}.\end{aligned}$$

Her er D området i xy -planet som er avgrenset av x -aksen, y -aksen og kurven $y = 4 - x^2$.

Vurdering: Her er nok en direkte utregning av flateintegralet det greieste, så da bør man si at det er det man gjør. Relevante mellomsva vil være å skrive opp uttrykket for $\widehat{\mathbf{N}} dS$ og også uttrykket for $\mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS$. Så kan man oppgi grensene man har satt på det itererte integralet man ender opp med, før man angir det endelige svaret.

Oppgave 10 Kurven \mathcal{C} ligger i planet $x - 2y + z + 2 = 0$ og skal ha positiv orientering mot klokka sett ovenfra. Planet kan skrives $z = -x + 2y - 2$ så en enhetsnormalvektor for planet vil da være $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. Orienteringen til \mathcal{C} gir at $\widehat{\mathbf{N}}$ må ha positiv z -komponent, så vi velger $\widehat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$. Dermed blir $\widehat{\mathbf{N}} dS = (1, -2, 1) dx dy$ (se også løsning på oppgave 9). Direkte utregning gir $\text{curl } \mathbf{F}(x, y, z) = (-z, -1, 6y)$. Projeksjonen av \mathcal{C} ned i xy -planet blir sirkelen $x^2 + y^2 = 9$.

Ved å bruke Stokes' teorem får vi nå (her er \mathcal{S} den delen av det angitte planet som har \mathcal{C} som rand, og D er sirkelskiva $x^2 + y^2 \leq 9$).

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = \iint_D (x - 2y + 2, -1, 6y) \cdot (1, -2, 1) dx dy \\ &= \iint_D (x + 4y + 4) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r \cos \theta + 4r \sin \theta + 4) r dr d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + 36 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + 18 \int_0^{2\pi} d\theta = 36\pi.\end{aligned}$$

Vurdering: Her bør det skrives at man bruker Stokes' teorem og regner ut et flateintegral istedenfor et linjeintegral. Relevante mellomsva vil være uttrykket for $\text{curl } \mathbf{F}$ og uttrykket for $\widehat{\mathbf{N}} dS$. Skalarproduktet av disse to kan også være et relevant mellomsva, samt grensene på det itererte integralet man ender opp med. Så angis det endelige svaret.