Plenumsregning uke 9 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

26. februar 2020

Plan i dag

Mer trippelintegraler:

- variabelskifte: sylinderkoordinater og kulekoordinater.
- massesenter.
- for det meste eksamensoppgaver.
- skissering av integrasjonsområder (ofte veldig nyttig).

Oppgave 14.6.9

Finn volumet av området over xy-planet og under paraboloiden

$$z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Oppsumering av løsning

Betrakter volum som dobbeltintegral av z over et område $E := \{(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Et variabelskifte ($u := x/a, v := y/b$) transformerer E til $\mathbb{D}$ (enhetsdisken) og det resulterende integralet kan regnes ut med polarkoordinater.

Eksamen sommeren 2013, oppgave 5

La T være legemet i 1. oktant $(x, y, z \geq 0)$ beskrevet ved ulikheten

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

der massetettheten er

$$\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

for en fiksert konstant k. Bestem massesenteret (lik tyngdepunktet) til T.

Oppsumering av løsning

Definisjon av massesenter:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M(T)} \iiint_T \mathbf{r} \, dM = \frac{1}{\iiint_T \delta \, dV} \iiint_T \mathbf{r}\delta \, dV. \tag{1}$$

der $\mathbf{r}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$ og $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Alle involverte integraler regnes enkelt ut med kulekoordinater.

Eksamen sommeren 2017, oppgave 6

La T være området i rommet som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og mellom $z = 0$ og $z = (x^2 + y^2)^{3/2}$. Regn ut

$$\iiint_T 3e^z \sqrt{x^2 + y^2}\, dV.$$

Oppsumering av løsning

Integrasjonsområdet kan enkelt skisseres. Fra skissen finner en grenser og integralet kan enkelt regnes ut ved hjelp av sylinderkoordinater.

Eksamen sommeren 2019, oppgave 6

Finn volumet av området R i $\mathbb{R}^3$ gitt ved ulikhetene:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{og } 0 \leq x \leq y.$$

Hvis tid: vi skal vise **to** måter å løse oppgaven på.

Oppsumering av løsning

Området R kan enkelt skisseres: det vil si alle områder gitt ved ulikheter kan enkelt skisseres. Derfra er kan en enkelt finne grenser med tanke på både sylinderkoordinater og kulekoordinater. For sylinderkoordinater ender man opp med å dele integrasjonen i to separate integraler. Volumet vi er på jakt etter er naturligvis gitt ved

$$V = \iiint_R dV. \tag{2}$$