Plenumsregning uke 8 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

19. februar 2020

Plan i dag

- Mer dobbeltintegraler: variabelskifteformel
  $dA(x, y) \to \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \; dA(u, v)$.
- Trippelintegraler: $\iiint_{\mathcal{R}} f \; dV$.

Oppgave 14.4.1 (pluss ekstra)

Bestem dobbeltintegralet

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2)\, dA.$$

Hva har du regnet ut? Bruk dette til å finne volumet av området begrenset av (den elliptiske) paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og planet $z = 4$.

Oppsumering av løsning

- Regner ut integral med polarkoordinater.
- Det vi har regnet ut er volum under grafen til paraboloiden over disken $x^2 + y^2 \leq a^2$.
- Volumet vi er på jakt etter er volumet av sylinder med høyde $a^2 = 4$ og radius $|a|$ minus integralet vi regnet ut (med $a^2 = 4$).

Oppgave 14.4.17

For hvilke verdier av k konvergerer integralet nedenfor? I tilfellet av konvergens, regn også ut integralet:

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^k}\, dA.$$

Svaret skal begrunnes. **Hint:** symmetri antyder at det kan være lurt med polarkoordinater.

Oppsumering av løsning

Betrakter integralet i polarkoordinater og ender opp med integralet $2\pi \int_{0 \leq r \leq 1} \frac{1}{r^{2k-1}} \, dr$. Det er nå enkelt å både betrakte konvergens og også regne ut integralet i tilfellet av konvergens.

Volumbetraktning

Betrakt flaten $z = f(x, y) = e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ og la E betegne området $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ i planet. Beregn volumet under grafen til z over E.

Hint: hva vet vi om volum og dobbeltintegraler?

Oppsumering av løsning

Volumet vi er på jakt etter er $\iint_E f(x,y)\,dA$. Integralet regnes ut i to skritt:

- Et variabelskifte $u := x/a, v := y/b$ som gir at integralet er $ab \iint_{\mathbb{D}} e^{u^2+v^2}\,dA(u,v)$ der $\mathbb{D}$ er enhetsdisken.
- deretter regnes det siste integralet ut direkte med polarkoordinater.

Oppgave 14.5.13

Beregn trippelintegralet:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-2y^2-3z^2}\, dV.$$

Hint: du kan få bruk for Gaussintegralet $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Oppsumering av løsning

Integralet vårt I er på produktformen: $I = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$ der hvert av integralene I_1, I_2, I_3 er Gaussintegralet modulo substitusjon. Svaret kan dermed nesten skrives ned direkte ved bruk av hintet (Gaussintegralet).

Oppgave 14.5.27

Bestem trippelintegralet:

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_0^x e^{x^3} \, dy \, dx \, dz.$$

Oppsumering av løsning

Integrasjon med hensyn på y regnes ut direkte slik at vi ender opp med integralet $\int_0^1 \int_z^1 xe^{x^3}\, dx\, dz$. Det siste integralet regnes så ut ved å bytte rekkefølge på grenser. Integrasjonsområdet er en trekant.