Plenumsregning uke 7 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

12. februar 2020

Plan i dag:

Dobbeltintegraler: $\iint_{\mathfrak{D}} f \; dA$

Oppgave 14.1.19

Beregn dobbeltintegralet ved **INSPEKSJON**:

$$\iint_{x^2+y^2\leq a^2} \left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)\, dA.$$

Hint: hva har integralet $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA(x,y)$ med *volum* å gjøre?

Kommentar: kan løses også "uten inspeksjon" (med "integrasjonsteknikker"). Dere lærer hvordan snart i kurset.

Oppsummering av løsning:

$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dA(x, y)$ er volumet <u>under</u> grafen til $z = f(x, y)$ over området $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$:

- $\iint_{\mathbb{D}_a} a\, dA = a \cdot \text{Areal}(\mathbb{D}_a)$ er lik volumet av sylinder med høyde a og radius a.
- $\iint_{\mathbb{D}_a} \sqrt{x^2 + y^2}\, dA(x, y)$ er <u>ikke</u> lik volumet av en kjegle med høyde a og radius a.

Integralet vårt: det første integralet minus det andre.

Oppgave 14.2.3

Beregn dobbeltintegralet:

$$\int_0^{\pi} \int_{-x}^{x} \cos(y)\, dy\, dx.$$

Til refleksjon: hva er integrasjonsområdet? Kan du skissere det?

Oppsummering av løsning:

Direkte utregning og bruk av definisjon av iterert dobbeltintegral:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy\ dx = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy \right]\ dx.$$

Oppgave 14.2.13

Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R \frac{x}{y} e^y \, dA$$

der R er området $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$.

Hint: det er ikke lett å integrere direkte med hensyn på y først.

Oppsummering av løsning:

Fra hintet: integrerer med hensyn på x først og skriver dermed $dA = dx\ dy$. Skisserer integrasjonsområdet, finner grenser og ender opp med:

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} e^y \ dx\ dy.$$

Oppgave 14.3.1

Avgjør om integralet konvergerer eller ikke, og i det tilfellet det gjør det, evaluer det:

$$\iint_Q e^{-x-y}\, dA$$

der Q er første kvadrant i xy-planet.

Hint: integralet vårt her er på en spesiell form (som kan forenkle ting).

Spørsmål: hvorfor dukker konvergensspørsmålet opp? Det vil si, hva gjør dette til et såkalt "uekte" integral?

Til refleksjon: samme oppgave men med *første kvadrant* byttet ut med *tredje kvadrant*?

Oppsummering av løsning:

Integralet er på produktformen:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_c^d g(y)\,dy.$$

I vårt tilfelle er de to faktorene like og oppgaven blir veldig enkel.

Oppgave 14.3.23

Finn gjennomsnittverdien til $x^2 + y^2$ over trekanten $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x$.

(Antakeligvis ikke urelevant) spørsmål: definisjonen av gjennomnittverdien til en flervariabel funksjon $f = f(\mathbf{x})$ over et område $R \subseteq \mathbb{R}^n$ (i dette kurset: $n \leq 3$)?

Oppsumering av løsning:

Gjennomsnittverdien til $f = f(x, y)$ over $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\frac{1}{\iint_{\mathcal{D}} \, dA} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dA(x, y) = \frac{1}{\text{Areal}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dA(x, y).$$

I vårt tilfelle er $\mathcal{D}$ en trekant og det er lett å finne grenser; arealet til trekanten skrives opp direkte. Integralet regnes så ut direkte (som et iterert integral). Substitusjon/bytte av variabler gjør (personlig) livet enklere.