Plenumsregning uke 5 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

29. januar 2020

Masse eksamensoppgaver!

(og noe litt annet: Laplace operator i polarkoordinater og Leibniz regel for retningsderiverte)

Eksamen våren 2007, oppgave 1

La f være funksjonen gitt ved

$$f(x, y, z) = \sin \frac{x}{2} + e^{2yz}.$$

I hvilken retning er den retningsderiverte til f i punktet $(\pi, 0, 1)$ størst? Regn ut den retningsderiverte i denne retningen.

Hint: hva er sammenhengen mellom prikkproduktet av to vektorer, lengdene deres og vinkelen mellom dem? Hvordan er prikkproduktet relatert til den retningsderiverte?

Eksamen sommeren 2005, oppgave 1

Finn en likning for tangentplanet til flaten $z^2 = x^2 + 2y^2$ i punktet $P = (1, 2, 3)$. Hvilke andre punkter på flaten har det samme tangentplanet?

Hint: likning til tangentplan til en *nivåmengde*

Eksamen sommeren 2011, oppgave 4

La $f(x,y,z)$ og $g(x,y)$ være to deriverbare funksjoner. Hvilket av uttrykkene nedenfor er et uttrykk for $\frac{\partial w}{\partial x}$ når $w(x,y) = f(x,y,z)$ der $z = g(x,y)$?

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}$;

(ii) $\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$;

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$;

(iv) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$;

(v) $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}$.

Hint: y og x er uavhengige variabler.

Eksamen våren 2002, oppgave 2

La f være funksjonen gitt ved $f(x, y, z) = xyz$, og la $\mathbf{v}$ være en vektor som står vinkelrett på både $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, og som har positiv $\mathbf{k}$-komponent. Finn den retningsderiverte til f i punktet $P_0(1, -1, 2)$ i retningen til vektoren $\mathbf{v}$.

Hint: kan vi konstruere ut ifra to vektorer i rommet en vektor som står normalt (vinkelrett) på begge disse? Har vi en slags operasjon som lar oss gjøre dette?

Eksamen våren 2002, oppgave 8

Likningen

$$t\ln(u) + x^2 + \frac{1}{2}t\ln(\pi t) = 0, \qquad 0 < t < 2x^2$$

definerer t implisitt som en funksjon av x og u. For $x = 1$ og $t = 1$, er $u = \frac{1}{e\sqrt{\pi}} \approx 0.208$. Bestem de partiellderiverte $\partial t/\partial x$ og $\partial t/\partial u$ for $(x, u) = (1, 1/(e\sqrt{\pi}))$, og finn en tilnærmet verdi for t når $x = 1.1, u = 0.2$.

Hint: implisitt derivasjon og lineærisering.

Laplace operator i polarkoordinater

La $f = f(x, y)$ være en funksjon av to variabler slik at Δf finnes, der vi minner om (dette ble også gjennomgått i plenumsregningen i forrige uke) at Laplacen til f, Δf, i kartesiske koordinater, tar formen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Finn Δf i polarkoordinater (r, θ).

Hint: kjerneregel.

Retningsderivert og Leibniz regel

Vis at den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}}|_{\mathbf{p}}$ i et punkt $\mathbf{p}$ og retningen $\mathbf{u}$ tilfredstiller *Leibniz regelen* (også kjent som produktregelen (for derivasjon)). Det vil si: vis at, for si to glatte funksjoner f, g, så har vi:

$$D_{\mathbf{u}}(fg)(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})D_{\mathbf{u}}g(\mathbf{p}) + g(\mathbf{p})D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p}).$$

Hint: har vi en "fin"/nyttig formel for den retningsderiverte?