Plenumsregning uke 14 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

31. mars 2020

Stokes' teorem

Stokes' teorem

- Eksamensoppgaver

Stokes' teorem

- Eksamensoppgaver, eksamensoppgaver

Stokes' teorem

- Eksamensoppgaver, eksamensoppgaver, eksamensoppgaver!

Stokes' teorem

- Eksamensoppgaver, eksamensoppgaver, eksamensoppgaver!
- Løsningsplan for **samtlige** oppgaver:

Stokes' teorem

- Eksamensoppgaver, eksamensoppgaver, eksamensoppgaver!
- Løsningsplan for **samtlige** oppgaver: bare én: ***Stokes' teorem***.

Så hva var Stokes' teorem igjen?

Theorem

La M være en glatt orientert n-dimensjonal mangfoldighet med rand ∂M med indusert orientering fra M (randorienteringen), og la $\omega \in \Omega_0^{n-1}(M)$ være en glatt $(n-1)$-differensialform med kompakt support i M. La d betegne den eksterne deriverte. Da har vi:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega. \tag{1}$$

Så hva var Stokes' teorem igjen?

Theorem

La M være en glatt orientert n-dimensjonal mangfoldighet med rand ∂M med indusert orientering fra M (randorienteringen), og la $\omega \in \Omega_0^{n-1}(M)$ være en glatt $(n-1)$-differensialform med kompakt support i M. La d betegne den eksterne deriverte. Da har vi:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega. \tag{1}$$

Ok, hva i huleste betyr alt dette?

Vel, la meg forklare:

Vel, la meg forklare:

APRILSNARR!!

Vel, la meg forklare:

APRILSNARR!!

Ok, men det forrige teoremet er faktisk et ordentlig teorem: den såkalte *generelle Stokes' teorem* som generaliserer *Greens' teorem, Divergensteoremet (både i planet og rommet) og Stokes' teorem i rommet (den dere har lært)*.

Vel, la meg forklare:

APRILSNARR!!

Ok, men det forrige teoremet er faktisk et ordentlig teorem: den såkalte *generelle Stokes' teorem* som generaliserer *Greens' teorem*, *Divergensteoremet (både i planet og rommet)* og *Stokes' teorem i rommet (den dere har lært)*.

Ok, la oss fortsette med den versjonen av Stokes' teorem dere *faktisk har lært*.

Så hva var Stokes' teorem igjen? (matematikk 2 versjonen nå)

Theorem

La $\mathcal{S}$ være en (stykkevis) glatt orientert flate i rommet der $\mathcal{C} := \partial\mathcal{S}$, randen til $\mathcal{S}$, består av en eller flere (stykkevis) glatte enkle lukkede kurver, positivt orientert i forhold til $\mathcal{S}$. La videre $\mathbf{F}$ *være et glatt vektorfelt definert på $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ og la* $\hat{\mathbf{N}}$ *være normalenhetsvektor til $\mathcal{S}$ (bestemt av orienteringen til $\mathcal{S}$ allerede). Da gjelder:*

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} curl(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS. \tag{2}$$

Så hva var Stokes' teorem igjen? (matematikk 2 versjonen nå)

Theorem

La $\mathcal{S}$ være en (stykkevis) glatt orientert flate i rommet der $\mathcal{C} := \partial\mathcal{S}$, randen til $\mathcal{S}$, består av en eller flere (stykkevis) glatte enkle lukkede kurver, positivt orientert i forhold til $\mathcal{S}$. La videre $\mathbf{F}$ *være et glatt vektorfelt definert på $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ og la* $\hat{\mathbf{N}}$ *være normalenhetsvektor til $\mathcal{S}$ (bestemt av orienteringen til $\mathcal{S}$ allerede). Da gjelder:*

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} curl(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS. \tag{2}$$

NB: her betyr at $\partial\mathcal{S}$ er positivt orientert i forhold til $\mathcal{S}$ følgende: $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}}$ peker *inn mot* $\mathcal{S}$, der $\hat{\mathbf{T}}$ er enhetstangentvektor til $\mathcal{C}$.

Så hva var Stokes' teorem igjen? (matematikk 2 versjonen nå)

Theorem

La $\mathcal{S}$ være en (stykkevis) glatt orientert flate i rommet der $\mathcal{C} := \partial\mathcal{S}$, randen til $\mathcal{S}$, består av en eller flere (stykkevis) glatte enkle lukkede kurver, positivt orientert i forhold til $\mathcal{S}$. La videre $\mathbf{F}$ være et glatt vektorfelt definert på $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ og la $\hat{\mathbf{N}}$ være normalenhetsvektor til $\mathcal{S}$ (bestemt av orienteringen til $\mathcal{S}$ allerede). Da gjelder:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} curl(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS. \tag{2}$$

NB: her betyr at $\partial\mathcal{S}$ er positivt orientert i forhold til $\mathcal{S}$ følgende: $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}}$ peker *inn mot* $\mathcal{S}$, der $\hat{\mathbf{T}}$ er enhetstangentvektor til $\mathcal{C}$.

Alternativt: høyrehåndsregel: tommel "peker i $\hat{\mathbf{N}}$ sin retning" når de resterende fingrene krummer i positiv orientering til $\partial\mathcal{S}$.

Et eksempel

La $\mathcal{S} = \mathbb{D}$ være ehetsdisken i planet med $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. Da er positiv orientering av $\partial\mathcal{S} = \partial\mathbb{D}$ (enhetssirkelen), <u>mot</u> klokka.

Et eksempel

La $\mathcal{S} = \mathbb{D}$ være ehetsdisken i planet med $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$. Da er positiv orientering av $\partial\mathcal{S} = \partial\mathbb{D}$ (enhetssirkelen), <u>mot</u> klokka.

Betrakt nå en ny flate $\mathcal{S}'$ som fåes ved å lage en glatt "ballong" over $\mathbb{D}$ med åpning kun gitt ved $\mathbb{D}$. Da er $\partial\mathcal{S} = \partial\mathcal{S}' = \partial\mathbb{D}$ og positiv orientering av $\partial\mathbb{D}$ i forhold til $\mathcal{S}'$ er dermed som før <u>mot klokka</u>. Stoke's teorem kan brukes både på $\mathcal{S} = \mathbb{D}$ og $\mathcal{S}'$ slik at:

$$\oint_{\partial\mathbb{D}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathbb{D}} \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \; dS = \iint_{\mathcal{S}'} \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathcal{S}'} \; dS \qquad (3)$$

der $\hat{\mathbf{N}}_{\mathcal{S}'}$ er enhetsnormalvektor til $\mathcal{S}'$ som peker ut av flaten.

Eksamen sommeren 2019, oppgave 10

La $\mathcal{C}$ være kurven gitt ved $x^2 + z^2 = 1, y = 0$ og la $\mathcal{C}$ være orientert mot klokken sett fra positiv y-akse. Regn ut:

$$\oint_{\mathcal{C}} (4z + e^{\cos(x)})\, dx + y^4\, dy + (x + 2y)\, dz.$$

Eksamen våren 2019, oppgave 10

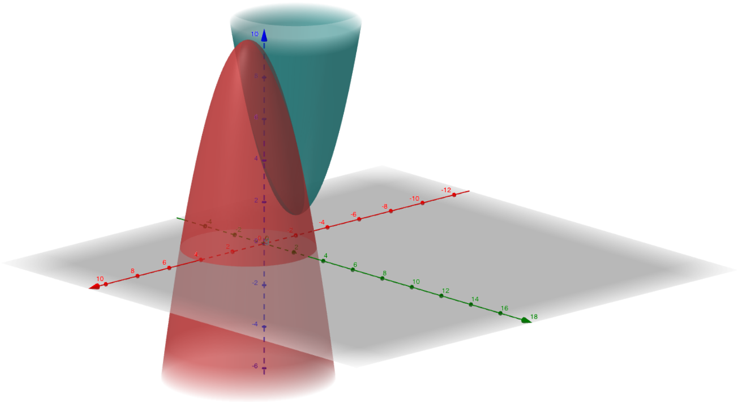
La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom de to paraboloidene gitt ved $z = 10 - (x-1)^2 - y^2$ og $z = (x+2)^2 + y^2 + 1$, og la $\mathcal{C}$ være orientert mot klokken sett ovenfra. Du kan bruke uten bevis at projeksjonen av $\mathcal{C}$ i xy-planet er gitt ved

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}.$$

Vis at $\mathcal{C}$ ligger i planet $z = 3x + 7$. Regn ut:

$$\oint_{\mathcal{C}} (2z - yz)\, dx + (\cos y + z)\, dy + (x^2 + z^2 + xy)\, dz$$

Plott av paraboloidene



Gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz, 0, (x-1)^2)$ og tre punkter $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (0, 0, 2)$ i $\mathbb{R}^3$. La T være tetraederet ("pyramiden") med hjørner i P_1, P_2, P_3 og $(0, 0, 0)$ og la $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalvektoren på overflaten ∂T som peker ut av T.

b) Finn $\text{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$ og regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er den lukkede kurven orientert mot klokken sett ovenfra som består av linjestykkene P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1.

Eksamen våren 2018, oppgave 8

Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} y^2\, dx + xy\, dy + xz\, dz$$

der $\mathcal{C}$ er skjæringsurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = 2y$ og planet $y = z$ og $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.