Plenumsregning uke 13 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

25. mars 2020

Planen i dag:

Divergensteoremet

Divergensteoremet

- Divergensteorem.

Divergensteoremet

- Divergensteorem.
- Divergensteorem.

Divergensteoremet

- Divergensteorem.
- Divergensteorem.
- Eksamensoppgaver (divergenstorem).

Divergensteoremet

- Divergensteorem.
- Divergensteorem.
- Eksamensoppgaver (divergenstorem).
- Identitet: $\oiint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$ (divergensteorem).

Divergensteoremet

- Divergensteorem.
- Divergensteorem.
- Eksamensoppgaver (divergenstorem).
- Identitet: $\oiint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$ (divergensteorem).

Alt handler om divergensteoremet i dag (divergensteorem i planet hadde vi forrige uke).

Oppgave 16.4.3

Finn fluksen til $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.

Oppgave 16.4.3

Finn fluksen til $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ gjennom sfæren med sentrum i origo og radius $a > 0$.

Plan for å løse oppgaven: bare en ting: divergensteoremet.

Oppgave 16.4.15

Et legeme R med konstant massetetthet har volum V og massesenter i $\mathbf{r}_{\text{cm}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Finn fluksen til

$$\mathbf{F} = (x^2 - x - 2y)\mathbf{i} + (2y^2 + 3y - z)\mathbf{j} - (z^2 - 4z + xy)\mathbf{k}$$

ut av R gjennom overflaten til R uttrykt ved V og $\mathbf{r}_{\text{cm}}$.

Oppgave 16.4.15

Et legeme R med konstant massetetthet har volum V og massesenter i $\mathbf{r}_{\text{cm}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Finn fluksen til

$$\mathbf{F} = (x^2 - x - 2y)\mathbf{i} + (2y^2 + 3y - z)\mathbf{j} - (z^2 - 4z + xy)\mathbf{k}$$

ut av R gjennom overflaten til R uttrykt ved V og $\mathbf{r}_{\text{cm}}$.

Plan for å løse oppgaven: bare to ting: divergensteoremet pluss definisjon av massesenter

Eksamen våren 2015, oppgave 5

Beregn fluksintegralet

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

der vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^2 + ye^y, 3y^2, z),$$

der $\mathcal{S}$ er den øvre halvsfæren definert av $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv $\mathbf{k}$-komponent.

Beregn fluksintegralet

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

der vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^2 + ye^y, 3y^2, z),$$

der $\mathcal{S}$ er den øvre halvsfæren definert av $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, og enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv $\mathbf{k}$-komponent.

Plan for å løse oppgaven: divergensteoremet, men med litt forsiktighet siden $\mathcal{S}$ ikke er lukket.

Eksamen sommeren 2012, oppgave 6 a) og b)

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$.

a) Finn volumet til T.

b) La $\mathcal{S}$ være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden og la $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker ut av legemet T. La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet definert ved:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}.$$

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Løsningsplan (fungerende oppsummering):

Så hva er planen?

a) Bruker teknikker fra trippelintegraler til å regne volumet (foreksempel sylinderkoordinater).

Løsningsplan (fungerende oppsummering):

Så hva er planen?

a) Bruker teknikker fra trippelintegraler til å regne volumet (foreksempel sylinderkoordinater).

b) Divergensteoremet, men vi må igjen være litt forsiktige, siden $\mathcal{S}$ ikke er lukket (den er ikke ikke hele overflaten ∂T til T (som *er* lukket)).

Eksamen sommeren 2014, oppgave 6 b)

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$. Vi lar $\mathcal{S}$ være den krumme delen av overflaten til T.

b) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}.$$

Regn ut div($\mathbf{F}$) og finn fluksen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren med positiv z-komponent.

Eksamen sommeren 2014, oppgave 6 b)

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$. Vi lar $\mathcal{S}$ være den krumme delen av overflaten til T.

b) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}.$$

Regn ut div($\mathbf{F}$) og finn fluksen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalvektoren med positiv z-komponent.

Plan som i forrige oppgave del b): divergensteorem, men med litt forsiktighet siden $\mathcal{S}$ ikke er hele den lukkede overflaten ∂T til T.

Oppgave 16.4.19

La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at for alle glatte vektorfelt $\mathbf{F}$ så gjelder:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0.$$

Oppgave 16.4.19

La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at for alle glatte vektorfelt $\mathbf{F}$ så gjelder:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0.$$

Plan: divergensteorem direkte pluss en viktig identitet fra vektoranalysen.

Oppgave 16.4.19

La D være et legeme i $\mathbb{R}^3$ som tilfredstiller antakelsene i divergensteoremet og la $\mathcal{S}$ være overflaten til D med $\hat{\mathbf{N}}$ den utadvendte normalen. Vis at for alle glatte vektorfelt $\mathbf{F}$ så gjelder:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0.$$

Plan: divergensteorem direkte pluss en viktig identitet fra vektoranalysen. Løsningen er ekstrem simpel og kort.