Plenumsregning uke 12 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

18. mars 2020

Planen i dag: Divergens, Curl og Green's teorem

- Divergensteoremet i planet fra Green's teorem.

Planen i dag: Divergens, Curl og Green's teorem

- Divergensteoremet i planet fra Green's teorem.
- Linjeintegraler.

Planen i dag: Divergens, Curl og Green's teorem

- Divergensteoremet i planet fra Green's teorem.
- Linjeintegraler.
- Areal via linjeintegral.

Planen i dag: Divergens, Curl og Green's teorem

- Divergensteoremet i planet fra Green's teorem.
- Linjeintegraler.
- Areal via linjeintegral.
- Eksamensoppgave som har med curl, linjeintegral og konservative vektorfelt å gjøre.

Divergensteorem i planet

Vis at Green's teorem gir divergensteoremet i planet:

$$\iint_R \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds,$$

der $\mathcal{C} = \partial R$ er randen til området $R \subseteq \mathbb{R}^2$, og der $\hat{\mathbf{N}}$ er *utadpekende* enhetsnormalvektor til $\mathcal{C}$ gitt ved enhetstangentvektor $\hat{\mathbf{T}}$ rotert 90 grader *med* klokken. Vi antar at alle involverte vektorfelt er glatte og også at $\mathcal{C}$ er glatt.

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- Som det står: bruke Green's teorem.

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- Som det står: bruke Green's teorem.
- Skrive om linjeintegralet på formen $\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy$ som dukker opp i Green's teorem.

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- Som det står: bruke Green's teorem.
- Skrive om linjeintegralet på formen $\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy$ som dukker opp i Green's teorem.
- Identifisere P og Q fra dette.

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- Som det står: bruke Green's teorem.
- Skrive om linjeintegralet på formen $\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy$ som dukker opp i Green's teorem.
- Identifisere P og Q fra dette.
- Vise at $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \mathrm{div}(\mathbf{F})$.

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- Som det står: bruke Green's teorem.
- Skrive om linjeintegralet på formen $\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy$ som dukker opp i Green's teorem.
- Identifisere P og Q fra dette.
- Vise at $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \mathrm{div}(\mathbf{F})$.
- Resultatet følger nå direkte fra Greens teorem:

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \, dA. \tag{1}$$

Oppgave 16.3.1

Evaluer $\oint_{\mathcal{C}}(\sin x + 3y^2)\,dx + (2x - e^{-y^2})\,dy$ der $\mathcal{C}$ er randen til halvdisken $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$ orientert mot klokken.

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- La $\mathbf{F} := (P, Q) := (\sin x + 3y^2, 2x - e^{-y^2})$. Da er linjeintegralet vi ønsker å finne gitt ved:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} P dx + Q dy. \tag{2}$$

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- La $\mathbf{F} := (P, Q) := (\sin x + 3y^2, 2x - e^{-y^2})$. Da er linjeintegralet vi ønsker å finne gitt ved:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy. \tag{2}$$

- Green's teorem gir da at dette er lik

$$\int_{\mathbb{D}_a^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA \tag{3}$$

der $\mathbb{D}_a^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$ er halvdisken.

Plan for løsning (fungerende oppsumering):

Så hva er planen?

- La $\mathbf{F} := (P, Q) := (\sin x + 3y^2, 2x - e^{-y^2})$. Da er linjeintegralet vi ønsker å finne gitt ved:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy. \tag{2}$$

- Green's teorem gir da at dette er lik

$$\int_{\mathbb{D}_a^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA \tag{3}$$

  der $\mathbb{D}_a^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$ er halvdisken.
- Bruker så standarde teknikker (som foreksempel variabelskifte) til å evaluere dette dobbeltintegralet.

Oppgave 16.3.5

Bruk et linjeintegral til å finne arealet av det plane området omringet av kurven $\mathbf{r} = a\cos^3 t\mathbf{i} + b\sin^3 t\mathbf{j}$ med $0 \le t \le 2\pi$.

Plan for løsning (fungerende oppsumering)

Så hva er planen?

- Gjøre et passende enkelt valg for P og Q i Green's teorem.

Plan for løsning (fungerende oppsumering)

Så hva er planen?

- Gjøre et passende enkelt valg for P og Q i Green's teorem.
- Foreksempel (det er andre muligheter) fra Green's teorem:

$$\oint_{\partial R} Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA \tag{4}$$

med $Q = x, P = 0$ får vi:

$$\oint_{\partial R} x \, dy = \iint_R \, dA = \text{Areal}(R). \tag{5}$$

Plan for løsning (fungerende oppsumering)

Så hva er planen?

- Gjøre et passende enkelt valg for P og Q i Green's teorem.
- Foreksempel (det er andre muligheter) fra Green's teorem:

$$\oint_{\partial R} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA \tag{4}$$

  med $Q = x, P = 0$ får vi:

$$\oint_{\partial R} x \, dy = \iint_R \, dA = \text{Areal}(R). \tag{5}$$

- Altså vil vi regne ut $\oint_{\mathcal{C}} x \, dy$ der $\mathcal{C}$ er kurven vi har fått oppgitt parametriseringen til.

(a) Vis at vektorfeltet **F** gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}, \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

er curlfritt (det vil si $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 0$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$).

(b) La $\mathcal{C}$ betegne kurven i xy-planet som starter i $(1,0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ nøyaktig én gang, der C er orientert mot klokken. Regn ut:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds$$

og avgjør hvorvidt **F** er konservativt. Begrunn svaret.

Plan for løsning (fungerende oppsumering)

Så Hva er planen?

(a) • Vi regner ut curl($\mathbf{F}$) direkte og sjekker at vi får 0 vekk fra origo.

Plan for løsning (fungerende oppsumering)

Så Hva er planen?

(a) • Vi regner ut curl(**F**) direkte og sjekker at vi får 0 vekk fra origo.

(b) • Vi regner ut linjeintegralet direkte ved å bruke en standard parametrisering for sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ (enhetssirkelen);

Plan for løsning (fungerende oppsumering)

Så Hva er planen?

(a) • Vi regner ut curl($\mathbf{F}$) direkte og sjekker at vi får 0 vekk fra origo.

(b) • Vi regner ut linjeintegralet direkte ved å bruke en standard parametrisering for sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ (enhetssirkelen);
  • Idé: hvis vi ikke får null så kan ikke vektorfeltet være konservativt.

Refleksjonspørsmål til avslutning

Hvorfor kan vi ikke bruke Green's teorem for å løse eksamensoppgaven, punkt b)?