Plenumsregning uke 11 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

11. mars 2020

Planen i dag

Flateintegraler: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$.

Kjapp repetisjon: standardmåte å regne flateintegraler

- Start med en parametrisering av flaten $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \mathcal{D}.$$

Kjapp repetisjon: standardmåte å regne flateintegraler

- Start med en parametrisering av flaten $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \mathcal{D}.$$

- Beregn partielle deriverte:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

Kjapp repetisjon: standardmåte å regne flateintegraler

- Start med en parametrisering av flaten $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \mathcal{D}.$$

- Beregn partielle deriverte:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

- Normalenhetsvektor er da gitt ved:

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

Kjapp repetisjon: standardmåte å regne flateintegraler

- Start med en parametrisering av flaten $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \mathcal{D}.$$

- Beregn partielle deriverte:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

- Normalenhetsvektor er da gitt ved:

$$\mathsf{N} = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

- Flatelement tilslutt:

$$dS = dS(u, v) = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA(u, v).$$

To eksempler:

- Areal av flate:

$$\text{Areal}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_{\mathcal{D}} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA(u, v)$$

To eksempler:

- Areal av flate:

$$\text{Areal}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_{\mathcal{D}} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA(u, v)$$

- Fluksintegral:

$$\Phi(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \pm \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA(u, v)$$

Oppgave 15.5.3

Finn arealet av den delen av planet $Ax + By + Cz = D, \quad C \neq 0$ som ligger inne i den elliptiske sylinderen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$

Oppsumering av løsning:

Rett frem: finner parametrisering, partiellderiverer og krysser.
Bruker formelen fra eksempel 1:

$$\text{Areal}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_{\mathcal{D}} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA(u, v). \tag{1}$$

Oppgave 15.5.17:

Finn den totale ladningen på flaten

$$\mathbf{r} = (e^u \cos v, e^u \sin v, u), \qquad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi)$$

når ladningstettheten er gitt ved $\delta = \sqrt{1 + e^{2u}}$.

Oppsumering av løsning:

Total ladning er gitt ved:

$$Q(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dQ \tag{2}$$

der $dQ = \delta dS$ er ladningselement og dS er flatelement. Oppgaven er dermed å beregne integral på formen:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\ dS \tag{3}$$

som gjøres på standardmåte: bruk av parametrisering $\mathbf{r}(u, v)$ for å skrive opp $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ dA(u, v)$.

Oppgave fluksintegral:

La $\mathcal{S}$ være den øvre halvdelen ($z \geq 0$) av kuleflaten med radius 1 og sentrum i origo, og la $\mathbf{N}$ være enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker vekk fra origo. Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Oppsumering av løsning:

"Trikset" er å innse hva normalenhetsvektoren **N** er for en sfære med viss radius (her 1). Deretter ved hjelp av foreksempel parametrisering i kulekoordinater (ϕ, θ) kan det resulterende flatintegralet enkelt regnes ut.

Kommentar: oppgaven kan også veldig enkelt løses ved hjelp av *DIVERGENSTEOREMET* som dere lærer snart (da er svaret rett og slett gitt med en gang som volumet av kula).

Et enkelt eksempel kommer nå i neste oppgave!

Divergensteorem (eksempel)

Betrakt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Hva er fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom sfæren sentrert i origo med radius R? Sammenlikn med volumet til kula (sfæren er randen til kula) og størrelsen $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ der vi skriver $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Kommentar: størrelsen $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ kalles for *divergensen til* $\mathbf{F}$ (i kartesiske koordinater), og betegnes ofte som $\mathrm{div}(\mathbf{F})$ eller $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

Oppsumering av løsning

Oppgaven er nesten løst med en gang av å merke at $\mathbf{N} \cdot \mathbf{F} = C$ der C er en positiv konstant. Da blir nemlig fluksen

$$\Phi(\mathbb{S}^2_R) = C \iint_{\mathbb{S}^2_R} dS = C\,\text{Areal}(\mathbb{S}^2_R). \tag{4}$$

Sammenlikning viser at dette er lik også $\operatorname{div}(\mathbf{F}) \cdot V(\mathbb{B}^3_R)$. I integralform kan vi derfor skrive:

$$\iint_{\mathbb{S}^2_R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_{\mathbb{B}^3_R} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV. \tag{5}$$

Dette holder mer generelt for også andre flater og legemer enn sfæren og kula: *DIVERGENSTEOREMET* (som dere lærer snart).

Oppgave 5.6.13:

Finn fluksen av $\mathbf{F} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ ut av (hele) flaten til kuben gitt ved $-a \le x, y, z \le a$. Du kan få bruk for integralet (ikke i boka):

$$\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2 + v^2}^3}\, du\, dv = \frac{2\pi}{3a}.$$

Oppsumering av løsning:

En slipper masse arbeid med bruk av symmetri: totalfluks er 6 ganger fluks gjennom (foreksempel) flaten $x = a$, $\Phi_{x=a}$. Sistnevnte kan regnes ut direkte (normalvektor er veldig enkel) ved bruk av det oppgitte integralet.

Oppgave 15.6.17:

La $\mathbf{N}$ være den utadpekende enhetsnormalen til en glatt og orientert flate $\mathcal{S}$ i rommet. Vis at fluksen til $\mathbf{N}$ ut av $\mathcal{S}$ er arealet av $\mathcal{S}$.

Oppsumering av løsning:

Sett direkte inn i formelen fra eksempel 2 (hva er $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ lik ?):

$$\Phi(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS \tag{6}$$

og bruk formel fra eksempel 1:

$$\text{Areal}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \, dS. \tag{7}$$

Oppgaven er løst.

Refleksjonsspørsmål: hvorfor viser (en variant av) denne oppgaven at vi kun egentlig har 1 type flateintegral: nemlig fluksintegraler $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$?