Plenumsregning uke 10 i TMA4105

Matematikk 2

NTNU

4. mars 2020

Plan i dag

$$\text{Vektortfelt og linjeintegraler: } \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- Fullføring av et viktig teorem om konservative vektorfelt fra OF.
- Eksamensoppgaver.
- Strømlinjer.
- En oppgave som handler om å vise noe sånt som: $\int_C f \nabla g \cdot d\mathbf{r} + \int_C g \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(Q)g(Q) - f(P)g(P)$.

Konservative vektorfelt, del 1:

Vi starter med en definisjon:

Definisjon

La $\mathbf{F}$ være et (kontinuerlig) vektorfelt i et sammenhengende område $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Vi sier at $\mathbf{F}$ da har **uavhengig-av-vei-egenskapen i** D dersom linjeintegralet

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

for en (stykkevis glatt) kurve $\gamma \subseteq D$, kun er avhengig av endepunktene til γ og uavhengig av selve kurven γ seg selv.

Konvervative vektorfelt, del 2:

Dere lærte i OF følgende teorem:

Theorem

La $\mathbf{F}$ *være et (kontinuerlig) vektorfelt i et sammenhengende åpent område* $D \subseteq \mathbb{R}^3$*. Da er følgende ekvivalente:*

(a) $\mathbf{F}$ *er konservativt (gradientfelt) i* D*.*

(b) $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *for alle (stykkevis glatte) lukkede kurver i* D*.*

(c) $\mathbf{F}$ *har uavhengig-av-vei-egenskapen i* D*.*

I OF viste dere at (a) impiserer (b) impliserer (c), og for å fullføre beviset gjenstår det å vise at (c) impliserer (a). Dette blir vår første oppgave i dagens plenumsregning.

Konservative vektorfelt, del 3:

Oppgave: vis implikasjonen (c) impliserer (a) i forrige teorem: hvis $\mathbf{F}$ har uavhengig-av-vei-egenskapen (i D) så er $\mathbf{F}$ konservativ (i D).

Hint: vis at en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ er

$$\phi(x, y, z) := \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{2}$$

der $(a, b, c), (x, y, z) \in D$ og integralet er over en vilkårlig (stykkevis glatt) kurve fra (a, b, c) til (x, y, z); *Spørsmål:* hvorfor er ϕ veldefinert?

Oppsumering av løsning

Bruke hintet direkte og da er man i mål per definisjon av konservative vektorfelt (gradientfelt).

Spørsmål: hvor ble det brukt at D er sammenhengende?

Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y + 4x^3y^3, y^3 + x + 3x^4y^2)$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos t, 2e^t \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Oppsumering av løsning

Viser at $\mathbf{F}$ er konservativ ved å finne en potensialfunksjon ϕ direkte. Deretter følger det at linjeintegralet er

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) \tag{3}$$

der $\mathbf{r}(t), t \in [a, b]$ er en parametrisering for $\mathcal{C}$.

Eksamen våren 2007, oppgave 5

Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

der

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} \sin x + \mathbf{j} \sin(y^2)$$

og C er kurven parametrisert ved

$$C: \qquad x = t, \qquad y = t^3 - t, \qquad\qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Oppsumering av løsning

Linjeintegralet kan smertefritt regnes ut direkte ved hjelp av definisjonen.

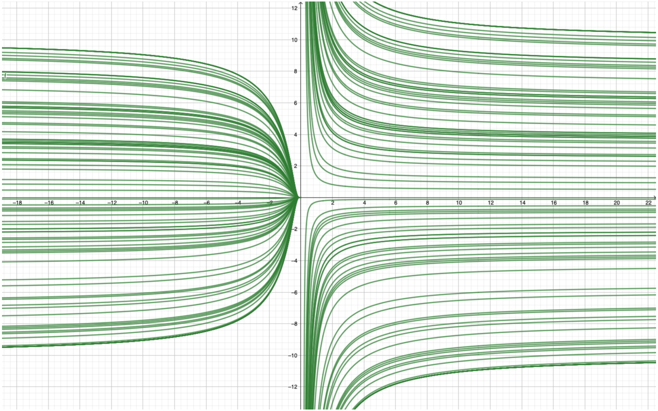
Oppgave 15.1.15

Bestem strømlinjene til hastighetsfeltet gitt ved $\mathbf{v}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

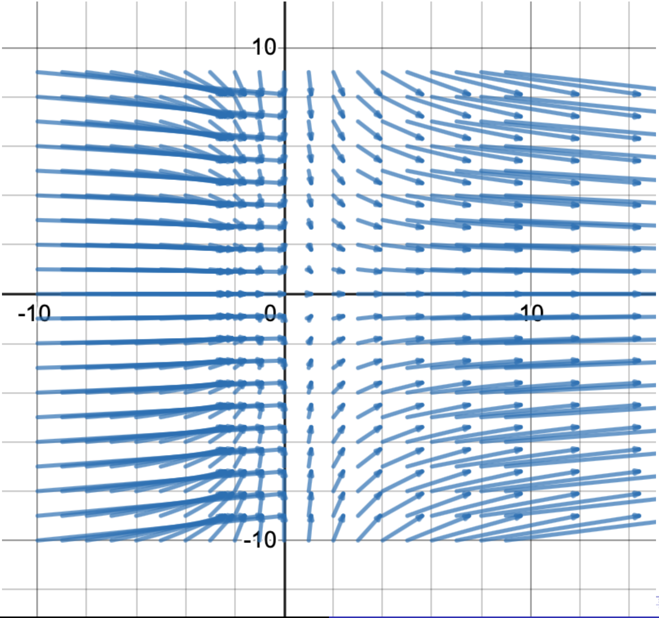
Oppsumering av løsning

Strømlinjene er bestemt ved (foreksempel) $y = y(x)$ som fåes ved å løse differensiallikningen $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$ som smertefritt kan løses som en seperabel differesiallikning.

Plott av noen (en god del) strømlinjer



(forsøk på) Plott av hastighetsfeltet



Oppgave 15.4.21

Hvis f og g er skalarfelt med kontinuerlige førsteordens partielle deriverte i et sammenhengende område D, vis at

$$\int_{\mathcal{C}} f \nabla g \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} g \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(Q)g(Q) - f(P)g(P)$$

for alle stykkevis glatte kurver i D fra P til Q.

Oppsumering av løsning

- Ved liæritet: kan anta kurven er glatt istedenfor stykkevis glatt.
- Ved linæritet også: de to integralene på venstresiden slåes sammen til et enkelt integral med integrand $f\nabla g + g\nabla f$.
- Kjerneregel: $\nabla h(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}(h(\mathbf{r}(t))), h \in \{f, g\}$.
- Produktregel:
  $\frac{d}{dt}((fg)(\mathbf{r}(t))) = f(\mathbf{r}(t))\frac{d}{dt}g(\mathbf{r}(t)) + g(\mathbf{r}(t))\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)).$
- Oppgaven er nå løst ved fundamentalteoremet.

Spørsmål: hvor ble det brukt antakelsen at D er sammenhengende?