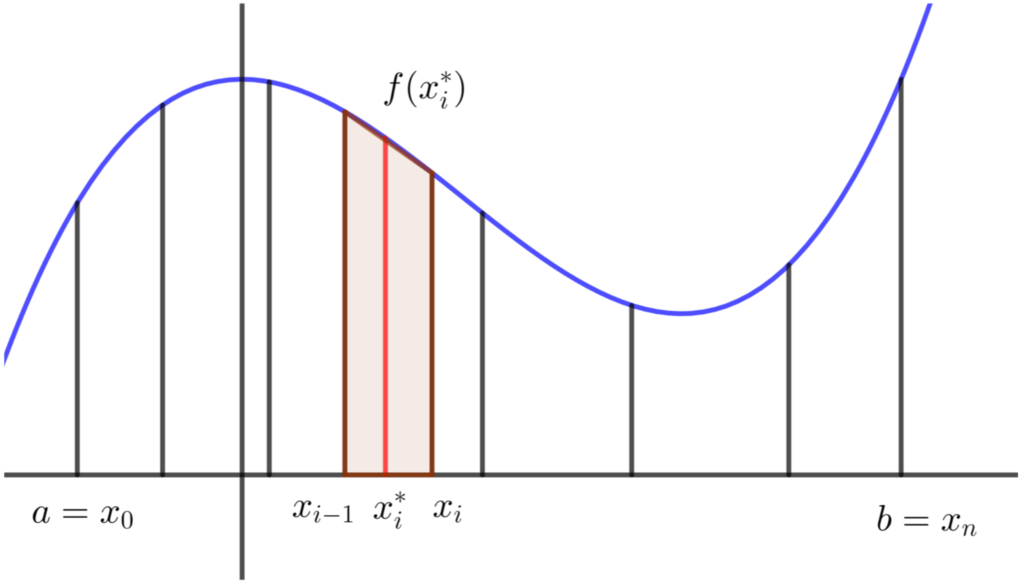
TMA 4105 Matematikk 2 Oversiktsforelesning 6

Frode Rønning

Nøkkelbegreper uke 7

- Dobbeltintegraler
  - Riemannsummer
  - Egenskaper til dobbeltintegraler
- Enkle (x-enkle, y-enkle) integrasjonsområder
- Itererte integraler
- Bytte av integrasjonsrekkefølge
- Uegentlige integraler for funksjoner med konstant fortegn
- Middelverdier for funksjoner av flere variable

Teori fra Matematikk 1: Riemann-integral av funksjon av én variabel



$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

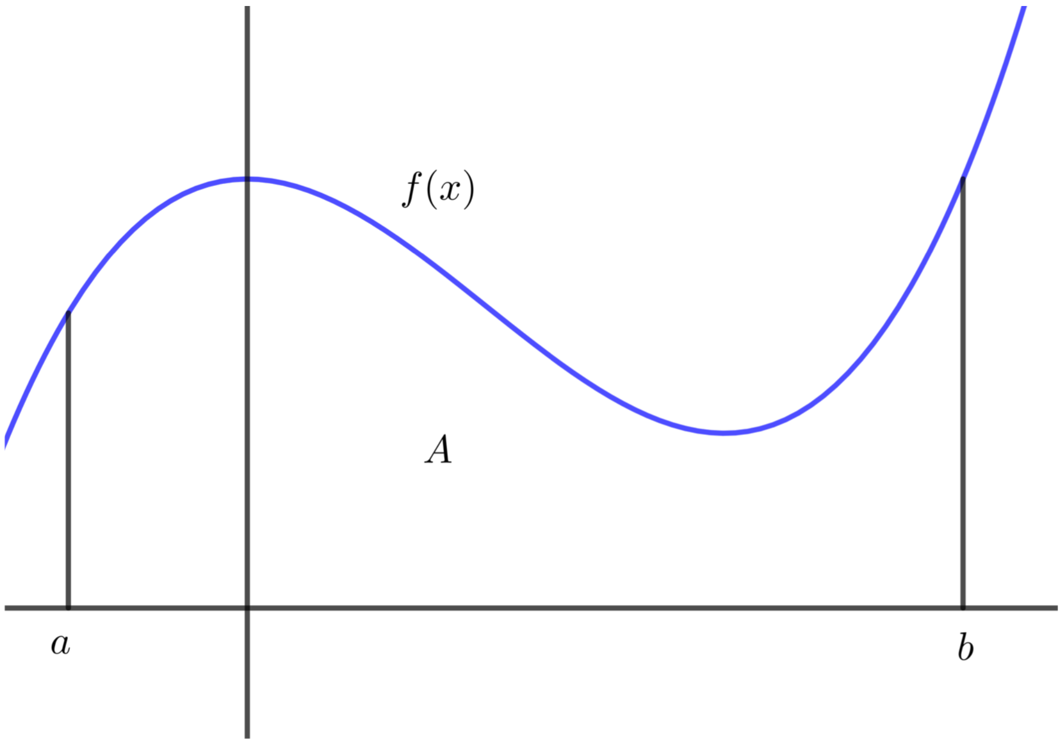
$$\|P\| = max|x_i - x_{i-1}|$$

Riemann-sum: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Vi vil generalisere dette til funksjoner av to (og flere) variabler

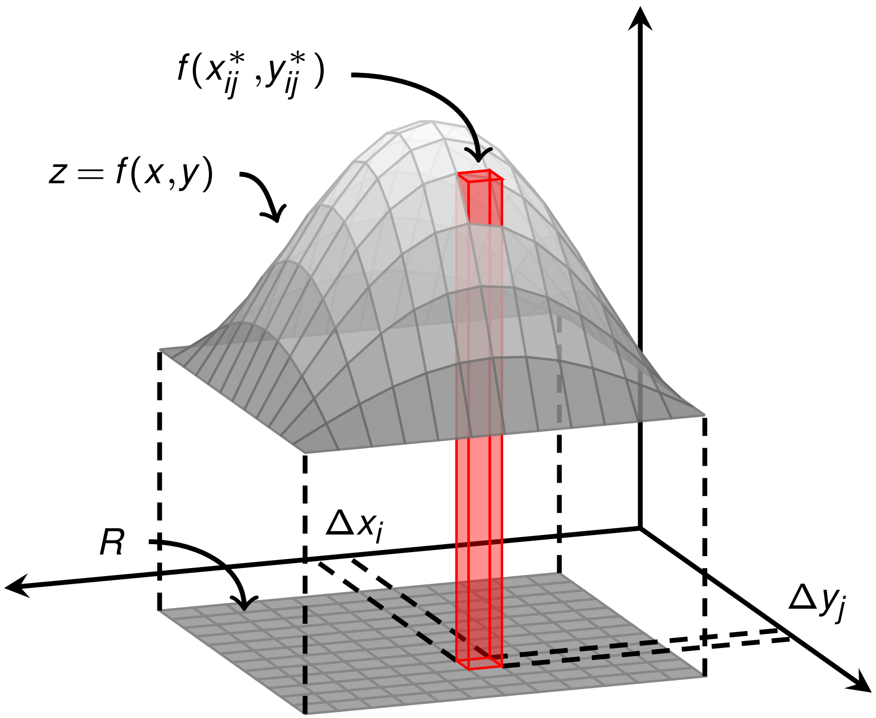
Eksempel på anvendelse fra Matematikk 1: Regne ut arealet under en kurve



Generalisering til to variabler: Volumet under en flate

$A = \int_a^b f(x)dx$ gir arealet under kurven $y = f(x)$ mellom a og b ($f \geq 0$)

Dobbeltintegral



$$I = \iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}$$

Dersom denne grenseverdien eksisterer, sier vi at *f* er integrerbar på *R*

Egenskaper til dobbeltintegraler

La $f(x, y)$ være en funksjon som er integrerbar over en lukket og begrenset mengde D.

(1) $\iint_D dA = \text{areal}(D)$

(2) Hvis $\text{areal}(D) = 0$, så er $\iint_D f(x, y)\, dA = 0$

(3) Hvis $f(x, y) \geq 0$ på D så er

$$\iint_D f(x, y)\, dA = V$$

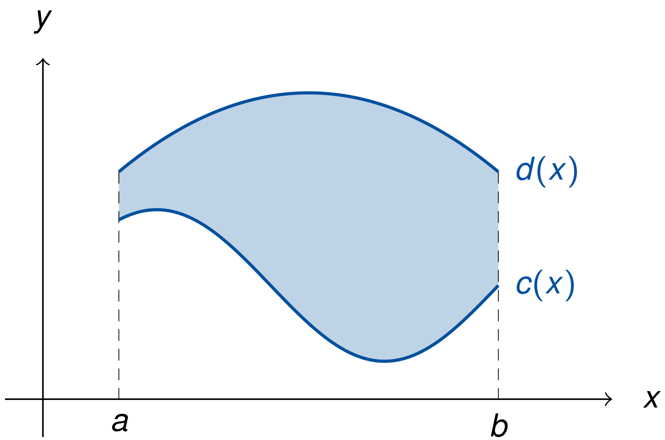
der V er volumet til legemet som ligger under grafen $z = f(x, y)$ og over D

(4) Hvis $D_1, D_2, \ldots, D_k$ er ikke-overlappende mengder og f er integrerbar på hver av dem, så er f integrerbar på unionen $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k$ og

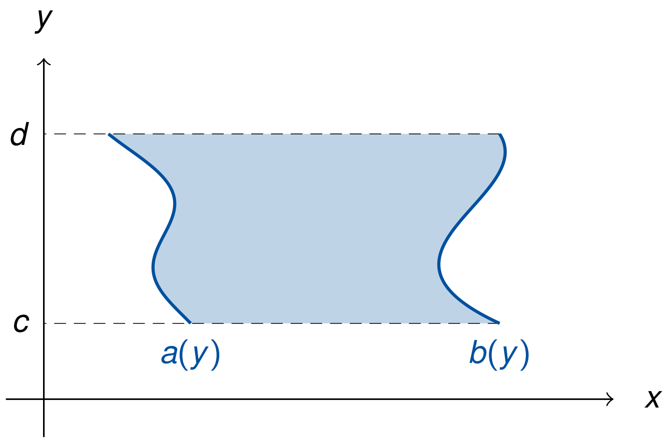
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x, y)\, dA$$

(se læreboka s. 819)

Hvordan regne ut dobbeltintegral?
Itererte integral



Et *y*-enkelt område

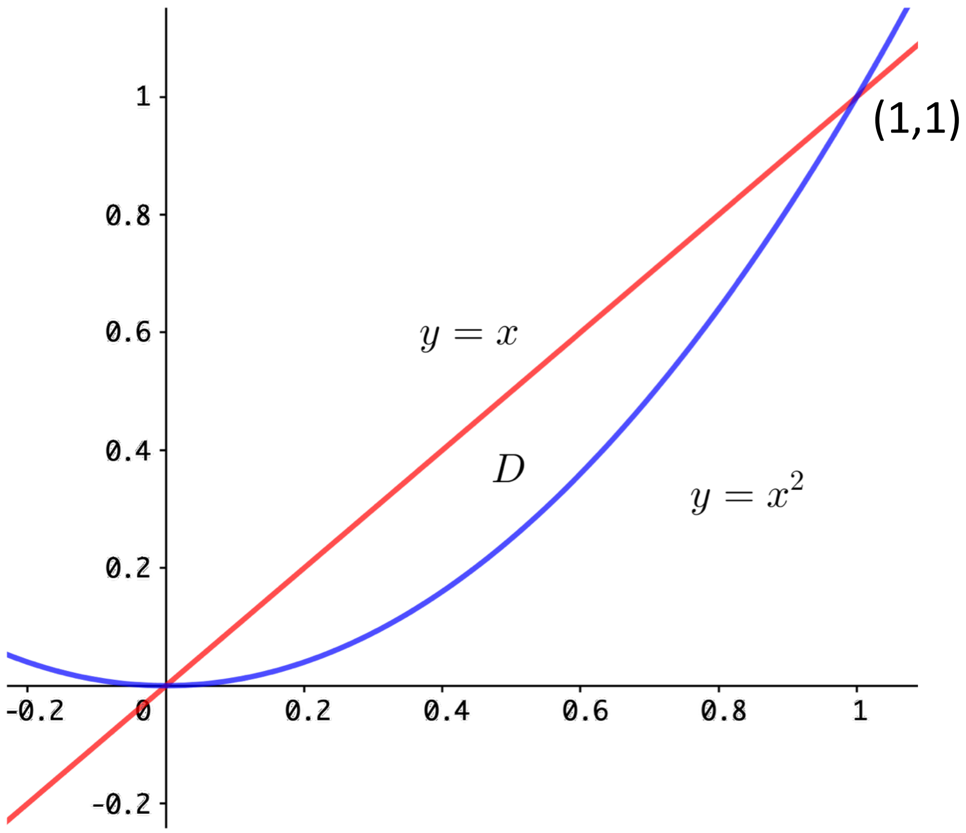


Et *x*-enkelt område

Eksempel 1

La D være området avgrenset av kurvene $y = x$ og $y = x^2$, og la $f(x,y) = x^2y$.

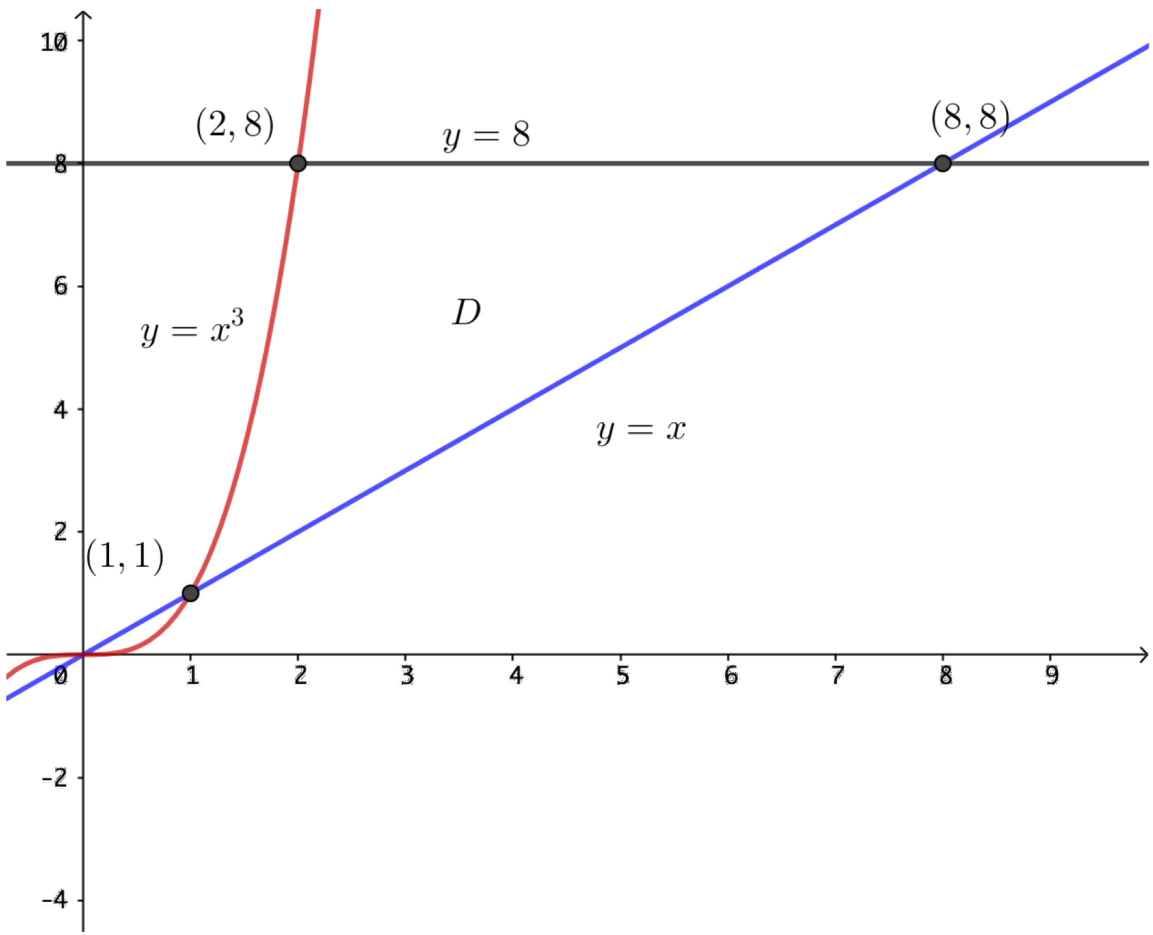
Regn ut $\iint_D f(x,y)\,dA$



Eksempel 2

La D være området avgrenset av kurvene $y = x$, $y = x^3$ og $y = 8$
og la $f(x,y) = e^y\sqrt{\frac{x}{y}}$

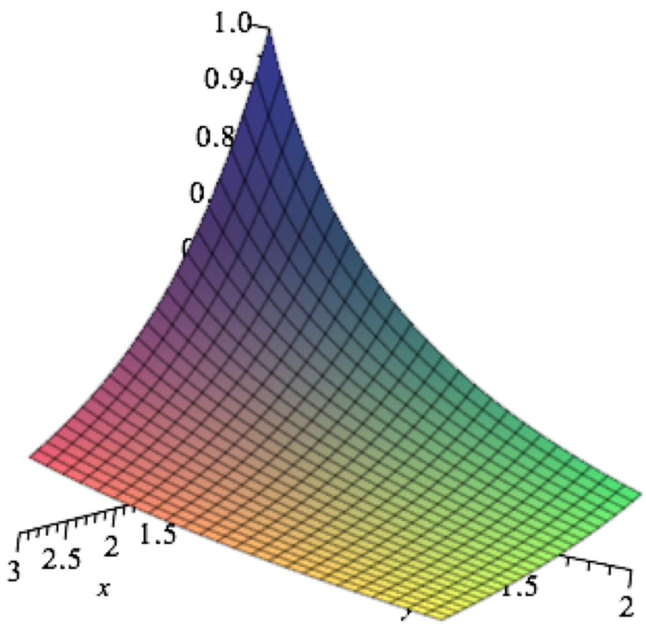
Regn ut $\iint_D\ f(x,y)dA$

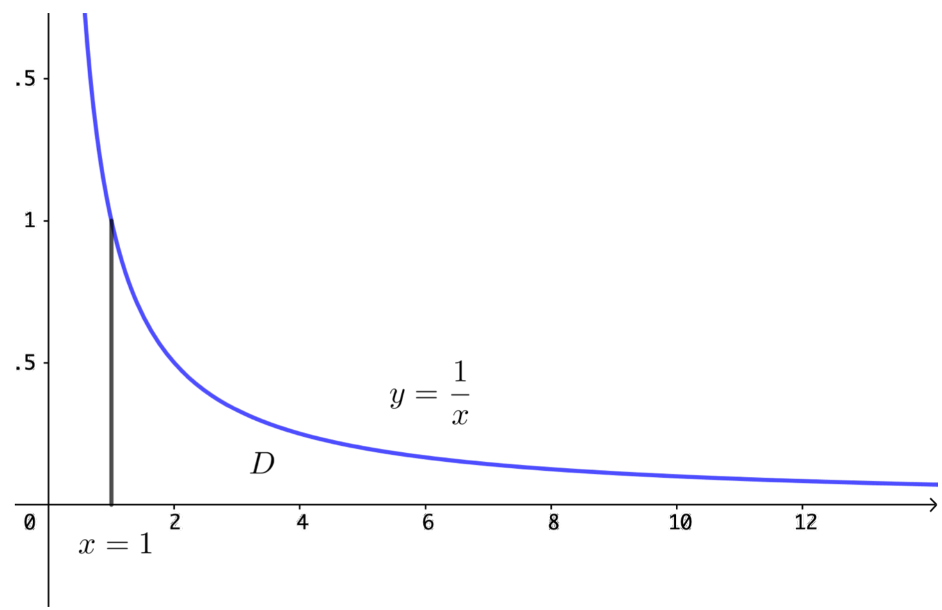


Eksempel 3

La *D* være området avgrenset av kurvene *x* = 1, *y* = 0 og $y = \frac{1}{x}$, og la $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

Eksisterer $\iint_D f(x, y)dA$, og i tilfelle hva er verdien?





Ved delvis integrasjon kan vi finne $\int \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\tan^{-1} x$

Middelverdisetningen

Enkeltintegral: Dersom *f* er kontinuerlig på [*a, b*], så finnes et tall *c* i <*a, b*> slik at

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Dobbeltintegral (Teorem 14.3): Dersom *f*(*x, y*) er kontinuerlig på en lukket, begrenset og sammenhengende mengde *D*, [*a, b*], så finnes et punkt (x_0 , y_0) i *D* slik at

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{areal}(D)}\iint_D f(x,y)dA$$