TMA 4105 Matematikk 2 Oversiktsforelesning 14 Vektoranalyse (kap. 15 og 16)

Frode Rønning

Viktige tema

- Vektor- og skalarfelt
  - Gradienten til skalarfelt
  - Divergens og curl til vektorfelt
  - Potensialfunksjon og vektorpotensial til vektorfelt
  - Konservative vektorfelt
  - Divergensfrie og rotasjonsfrie (sirkulasjonsfrie, curlfrie) vektorfelt
- Linje- og flateintegral; for funksjoner og for vektorfelt
  - Arbeid og fluks
- Greens teorem, Divergensteoremet og Stokes' teorem

Vektorfelt og skalarfelt

Vektorfelt: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Skalarfelt: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Operatorer på skalar- og vektorfelt

Gradient:

Gitt skalarfelt $f(x,y,z)$.

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}\ \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Divergens:

Gitt vektorfelt $\vec{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$.

$$div\ \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

(Skrives også $\nabla \cdot \vec{F}(x,y,z)$)

Curl:

Gitt vektorfelt $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

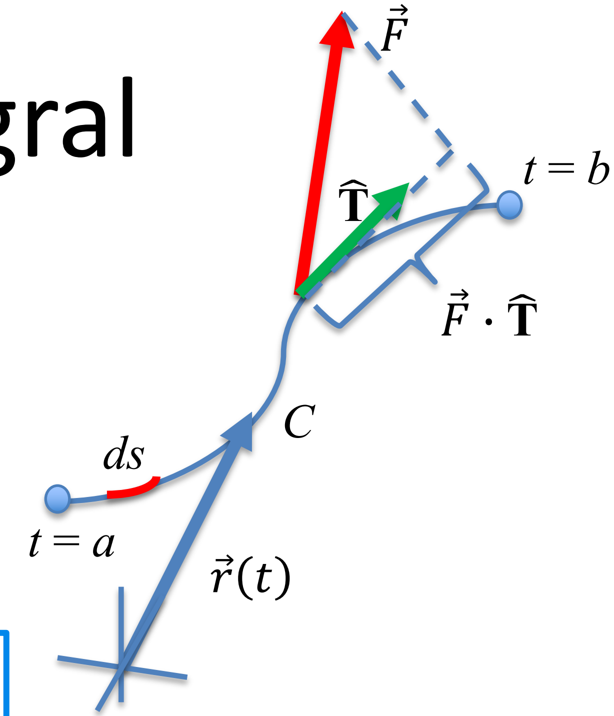
$$curl\ \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(Skrives også $\nabla \times \vec{F}(x,y,z)$)

Operatorer på skalar- og vektorfelt

- Både *gradient*, *divergens* og *curl* er en form for derivasjon (differensialoperatorer)
- Antiderivasjon:
  - Gitt et vektorfelt $\vec{F}$. Bestem f slik at $\vec{F}$ = $\nabla f(x, y, z)$
    - f kalles en **potensialfunksjon** for $\vec{F}$
    - Hvis en potensialfunksjon finnes, kalles $\vec{F}$ **konservativt**
    - For at $\vec{F}$ skal ha en potensialfunksjon, så må *curl* $\vec{F}$ = (0,0,0)
      - Gradientfelt er *rotasjonsfrie* (sirkulasjonsfrie)
  - Gitt et vektorfelt $\vec{G}$. Bestem $\vec{H}$ slik at $\vec{G} = curl\ \vec{H}$
    - $\vec{H}$ kalles et **vektorpotensial** for $\vec{G}$
    - For at $\vec{G}$ skal ha et vektorpotensial så må *div* $\vec{G}$ = 0
      - Rotasjonsfelt (rene curl-felt) er *divergensfrie*
    - Et vektorpotensial, dersom det finnes, er aldri entydig

Linjeintegral



$$C\colon \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, \qquad a \leq t \leq b$$

$$ds = |\vec{r}\,'(t)|dt$$

Type 1: For funksjoner, $f(x, y, z)$

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|dt$$

Type 2: For vektorfelt, $\vec{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

Arbeid som vektorfeltet gjør langs kurven

Konservative vektorfelt Uavhengighet av veivalg

La D være et åpent, sammenhengende område og $\mathbf{F}$ et glatt vektorfelt på D.

Følgende er ekvivalent:

(a) $\mathbf{F}$ er konservativt i D.

(b) $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$ for hver stykkevis glatt, lukket kurve C i D.

(c) $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ har samme verdi for alle stykkevis glatte kurver C som forbinder to gitte punkter P_0 og P_1

- Konservative vektorfelt utfører ikke noe arbeid rundt en lukket kurve
- Konservative vektorfelt er rotasjonsfrie
- Hvis $\mathbf{F}$ er konservativt, $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, og C er gitt ved $\mathbf{r}(t), t \in [t_0, t_1]$, så er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(t_1)) - \varphi(\mathbf{r}(t_0))$$

Eksamen vår 2013

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j} \qquad \text{for} \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

er curlfritt (det vil si, $\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y)\cdot\mathbf{k} = 0$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$).

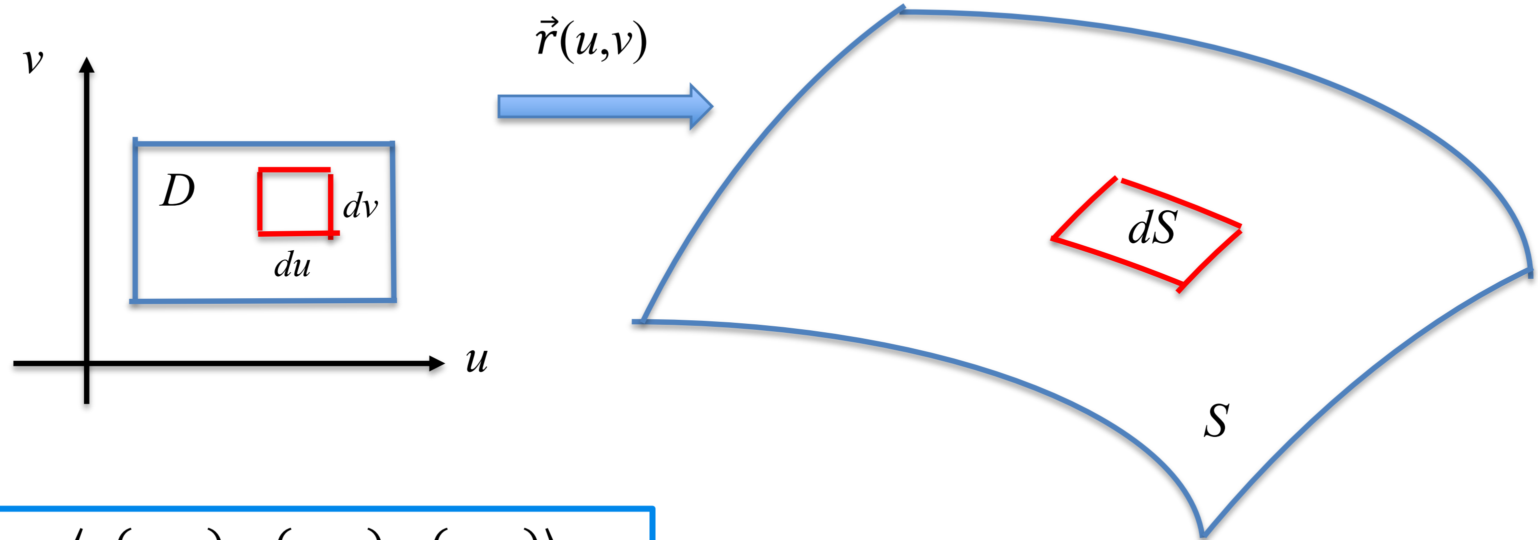
b) La C betegne kurven i xy-planet som starter i $(1,0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2+y^2=1$ nøyaktig én gang, der C er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds,$$

og avgjør hvorvidt $\mathbf{F}$ er konservativt. Begrunn svaret.

Vektorfeltet er rotasjonsfritt der det er definert, men utfører allikevel et arbeid rundt en lukket kurve som omslutter det singulære punktet (0,0).
Det er altså *ikke* konservativt.
Merk at definisjonsområdet ikke er enkeltsammenhengende.

Flateintegral for funksjoner

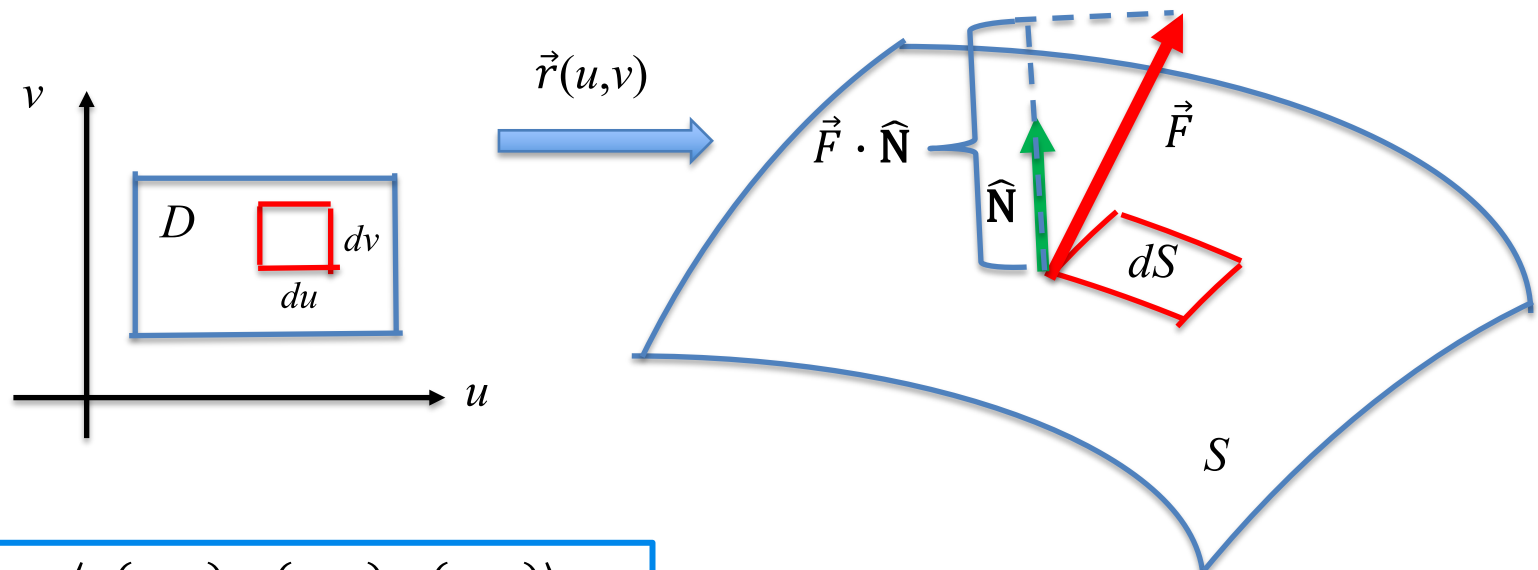


$$S:\ \vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle,$$
$$(u,v) \in D$$

$$dS = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du dv$$

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du dv$$

Flateintegral for vektorfelt (fluksintegral)



$$S\colon\ \vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle,$$
$$(u,v)\in D$$

$$dS = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| dudv$$

$$\iint_S\ \vec{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \pm\iint_D\ \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\overbrace{\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)dudv}^{\hat{\mathbf{N}}\,dS}$$

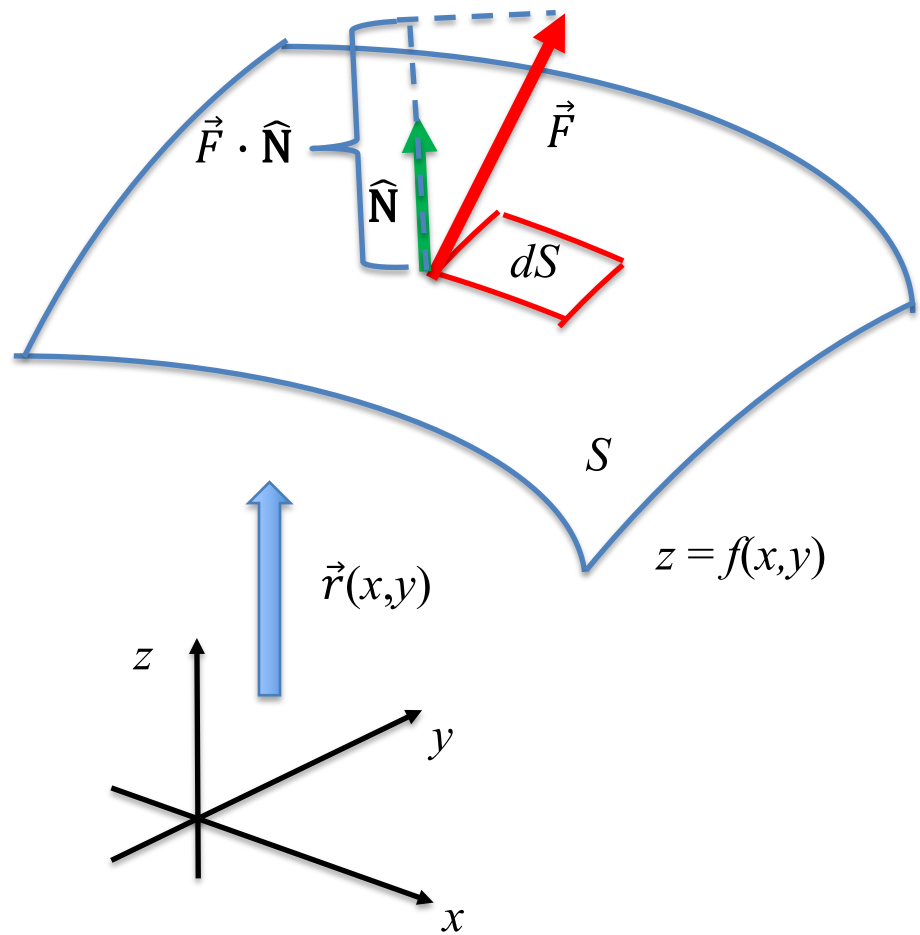
Viktig spesialtilfelle

Dersom S kan uttrykkes som $z = f(x,y)$, dvs. S kan parametriseres

$$\vec{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y) \rangle$$

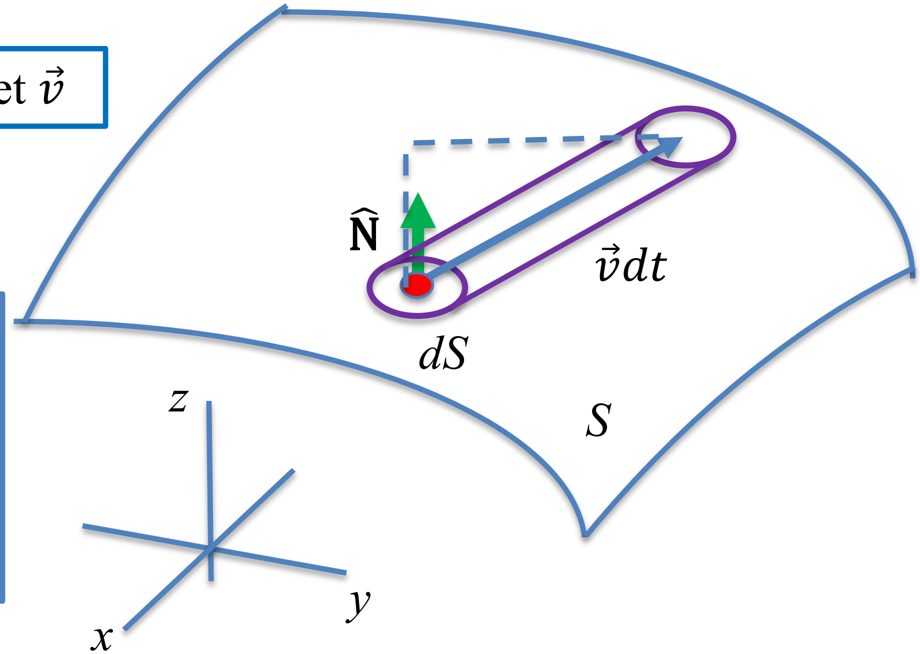
så vil

$$\hat{\mathbf{N}} dS = \pm \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= \pm \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dxdy$$



Fortolkning av fluksintegral

Eks.: Væskestrøm gjennom flata S med hastighet $\vec{v}$



Endringsrate til væskevolumet V gjennom flateelementet dS:

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Endringsrate til V gjennom hele S = Fluksen til $\vec{v}$ gjennom S:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Fortolkning av divergens

Gitt vektorfelt $\vec{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$. $\quad div\ \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

S_r er en kule med radius r, sentrum i origo, ytre enhetsnormalvektor $\widehat{\mathbf{N}}$ og volum lik V_r

Da kan det vises at

$$div\vec{F}(0,0,0) = \lim_{r\to 0} \frac{\oiint_{S_r} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS}{V_r}$$

$div\ \vec{F}(x,y,z) > 0$: (x,y,z) er en **kilde**
$div\ \vec{F}(x,y,z) < 0$: (x,y,z) er et **sluk**

Fortolkning av curl

Eksempel:

La $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$. Da er $curl\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2)$

La C_r være en sirkel med radius r, sentrum i origo.

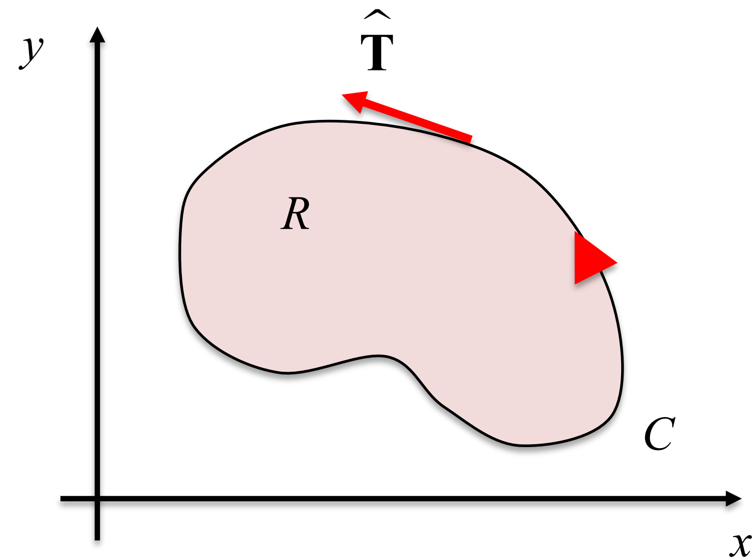
Direkte utregning gir $\oint_{C_r} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r^2 = 2A_r$, der A_r er arealet innenfor C_r

Altså har vi at

$$curl\ \vec{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\oint_{C_r} \vec{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_r}$$

«Sirkulasjon per arealenhet»

Greens teorem



La R være et regulært, lukket område i xy-planet med rand $C = \partial R$ som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}\,(x,y) = P(x,y)\,\vec{\imath} + Q(x,y)\,\vec{\jmath}$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{T}}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA}$$

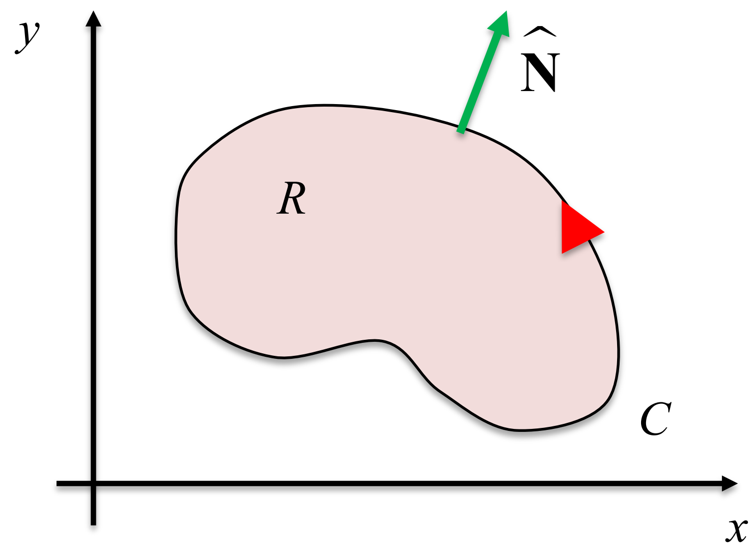
(Regulært område: Område som kan deles opp i områder som både er x- og y-enkle)

Divergensteoremet i planet

La R være et regulært, lukket område
i xy-planet med rand $C = \partial R$ som består av
en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede
kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

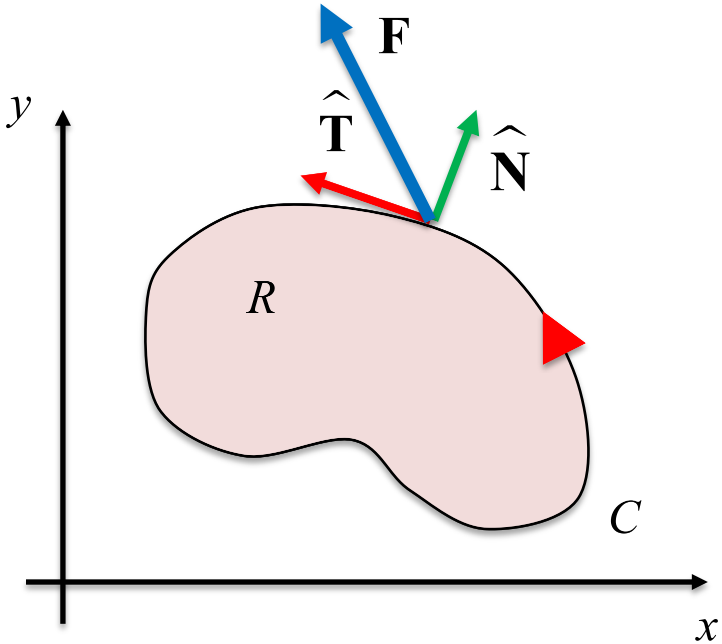
Hvis $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{\imath} + Q(x,y)\,\vec{\jmath}$ er et glatt
vektorfelt definert på R, så er

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA}$$



La R være et regulært, lukket område i xy-planet med rand $C = \partial R$ som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

$\mathbf{F}\,(x,y) = P(x,y)\,\vec{\imath} + Q(x,y)\,\vec{\jmath}$ er et glatt vektorfelt definert på R



Divergensteoremet i planet

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

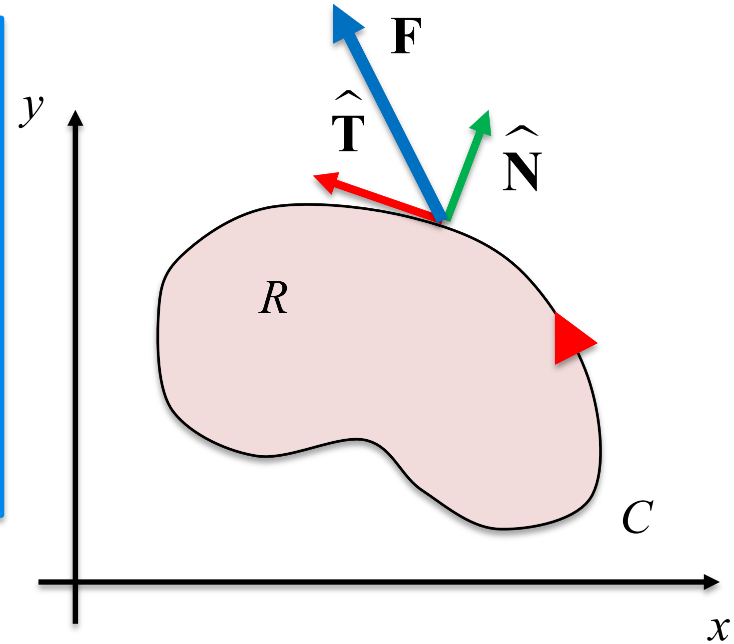
Greens teorem

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{T}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La R være et regulært, lukket område i xy-planet med rand $C = \partial R$ som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{\imath} + Q(x,y)\,\vec{\jmath}$ er et glatt vektorfelt definert på R



Divergensteoremet i planet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$$

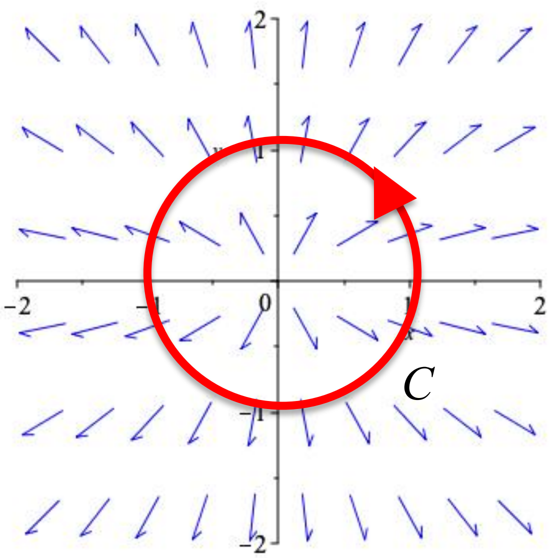
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Greens teorem

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}}\, ds = \iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \vec{k}\, dA$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Rotasjonsfritt vektorfelt



$$\vec{F}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \nabla \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

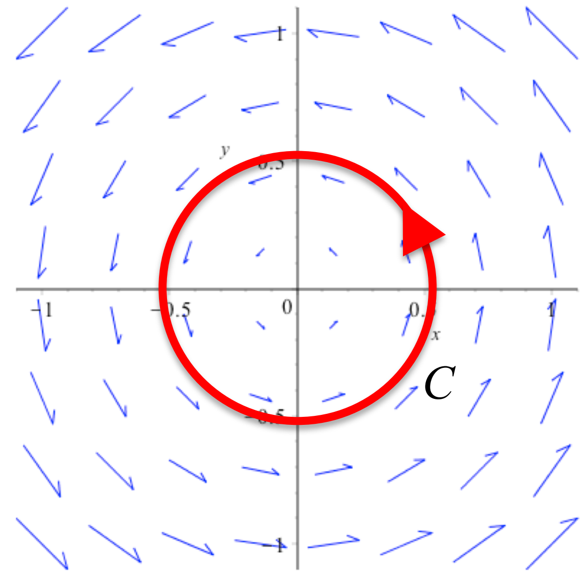
$$curl\ \vec{F} = (0,0,0)$$

$$div\ \vec{F} = 2$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}}\, ds = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds \neq 0$$

Divergensfritt vektorfelt



$$\vec{F}(x,y) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath} = curl\ (xz\vec{\imath} + yz\vec{\jmath})$$

$$curl\ \vec{F} = 2\vec{k}$$

$$div\ \vec{F} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, ds = 0$$

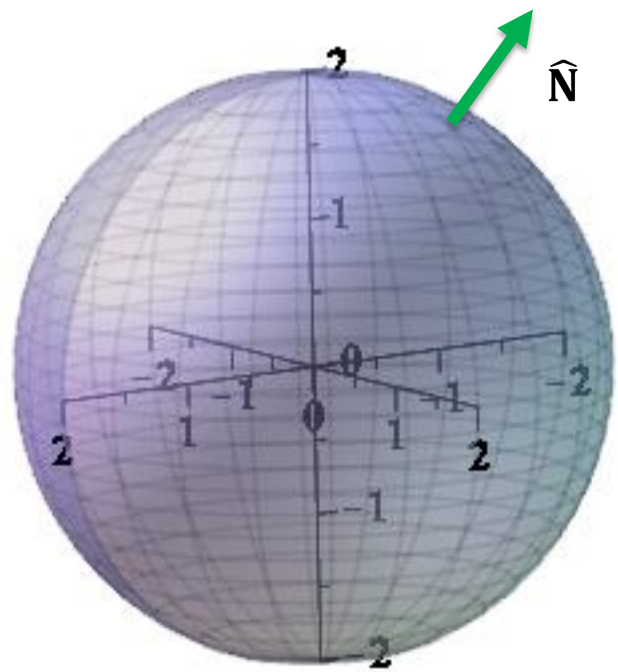
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{T}}\, ds \neq 0$$

Divergensteoremet (Gauss' teorem)

La D være et regulært område i $\mathbb{R}^3$ med rand $S = \partial D$ som er en orientert, lukket flate, med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ som peker ut av D.

Hvis $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt definert på D, så er

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV}$$



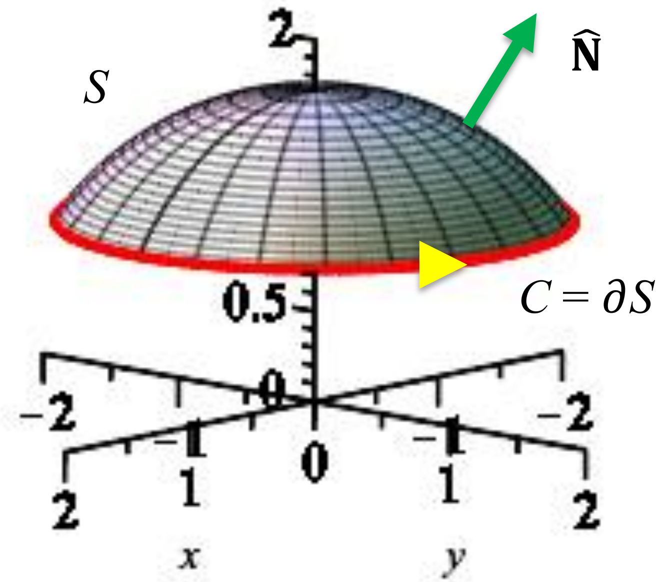
$S = \partial D$

Stokes' teorem

La S være en stykkevis glatt, orientert flate i $\mathbb{R}^3$ med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$, der randen til S, $C = \partial S$ består av en eller flere stykkevis glatte, lukkede kurver med orientering bestemt av orienteringen til S.

Hvis $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt definert på en åpen mengde som inneholder S, så er

$$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{N}}\, dS}$$



Eksempel

La $\mathcal{C}$ være trekanten med hjørnepunktene $(5,0,0)$, $(0,3,0)$og $(0,0,5)$.

Regn ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{2}{15}\, xy\,\mathrm{d}x + \frac{2}{9}\, yz\,\mathrm{d}y + \frac{2}{25}\, xz\,\mathrm{d}z$$

hvor kurven $\mathcal{C}$ er orientert med klokka sett fra punktet $(5,5,5)$.

Svaret skal være et eksakt, rasjonalt tall.

Vil bruke Stokes' teorem og regne ut flateintegralet heller enn linjeintegralet:

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS$$

Dersom S kan uttrykkes som $z = f(x,y)$, så vil $\hat{\mathbf{N}}dS = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dxdy$

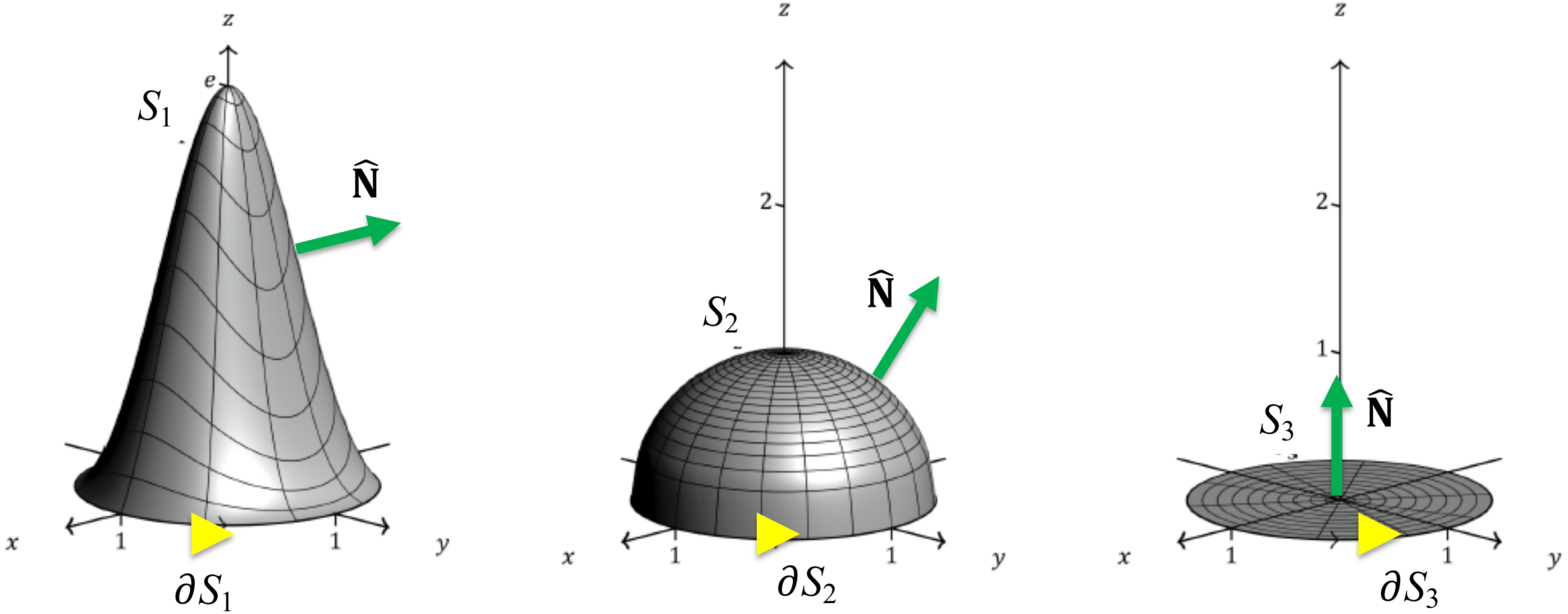
Generelt gjelder, med S parametrisert ved

$$\vec{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle, \qquad (u,v) \in R$$

$$\hat{\mathbf{N}}dS = \pm\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) dudv$$

Eksempel: Bruk av Stokes' teorem

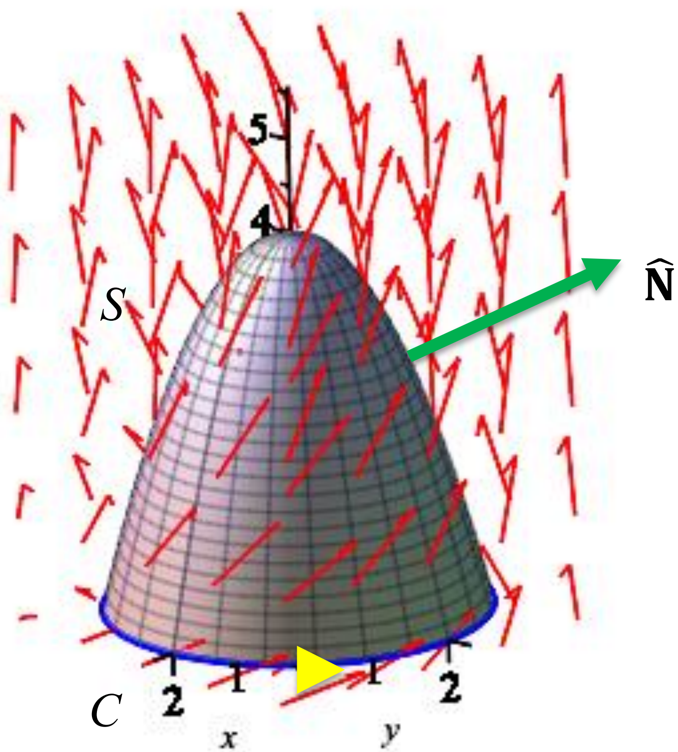
Flater som har samme rand og induserer samme orientering av randen



$$\oint_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

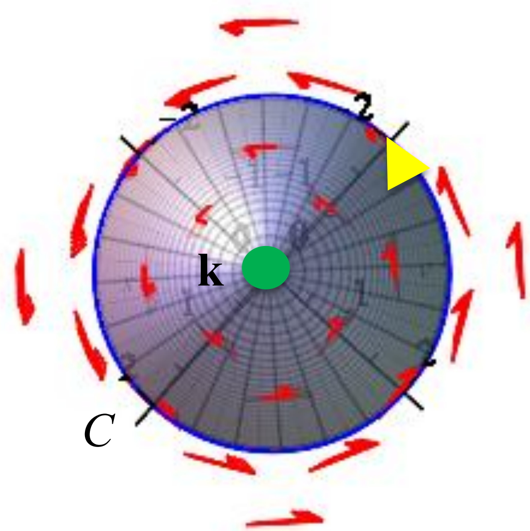
$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S_2} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{S_3} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Eksempel:
Flaten S er gitt ved $z = 4 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$, med orientering gitt ved at $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv z-komponent. Vektorfeltet $\vec{F}$ er gitt ved $\vec{F} = (-y,\ x,\ 1+z)$. Da er $curl\ \vec{F} = 2\ \vec{k}$.
Finn $\oint_C\ \vec{F}\cdot d\vec{r}$, der $C = \partial S$ er randa til S.



S_2 er flaten $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$.

Stokes' teorem gir:
$\oint_C\ \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S\ curl\ \vec{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}dS =$
$\iint_{S_2}\ curl\ \vec{F}\cdot\vec{k}\ dS = 2\iint_D\ dxdy = 8\pi$



Sett ovenfra

Hva blir fluksen til $\vec{F}$ ut av den lukkede flata som består av S og S_2?