

TMA 4105 Matematikk 2  
Oversiktsforelesning 14  
Vektoranalyse (kap. 15 og 16)

Frode Rønning

# Viktige tema

- Vektor- og skalarfelt
  - Gradienten til skalarfelt
  - Divergens og curl til vektorfelt
  - Potensialfunksjon og vektorpotensial til vektorfelt
  - Konservative vektorfelt
  - Divergensfrie og rotasjonsfrie (sirkulasjonsfrie, curlfrie) vektorfelt
- Linje- og flateintegral; for funksjoner og for vektorfelt
  - Arbeid og fluks
- Greens teorem, Divergensteoremet og Stokes' teorem

# Vektorfelt og skalarfelt

Vektorfelt:  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Skalarfelt:  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

# Operatorer på skalar- og vektorfelt

## Gradient:

Gitt skalarfelt  $f(x, y, z)$ .

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

## Divergens:

Gitt vektorfelt  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ .

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

(Skrives også  $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z)$ )

## Curl:

Gitt vektorfelt  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(Skrives også  $\nabla \times \vec{F}(x, y, z)$ )

# Operatorer på skalar- og vektorfelt

- Både *gradient*, *divergens* og *curl* er en form for derivasjon (differensialoperatorer)
- Antiderivasjon:
  - Gitt et vektorfelt  $\vec{F}$ . Bestem  $f$  slik at  $\vec{F} = \nabla f(x, y, z)$ 
    - $f$  kalles en **potensialfunksjon** for  $\vec{F}$
    - Hvis en potensialfunksjon finnes, kalles  $\vec{F}$  **konservativt**
    - For at  $\vec{F}$  skal ha en potensialfunksjon, så må  $\text{curl } \vec{F} = (0,0,0)$ 
      - Gradientfelt er *rotasjonsfrie* (sirkulasjonsfrie)
  - Gitt et vektorfelt  $\vec{G}$ . Bestem  $\vec{H}$  slik at  $\vec{G} = \text{curl } \vec{H}$ 
    - $\vec{H}$  kalles et **vektorpotensial** for  $\vec{G}$
    - For at  $\vec{G}$  skal ha et vektorpotensial så må  $\text{div } \vec{G} = 0$ 
      - Rotasjonsfelt (rene curl-felt) er *divergensfrie*
    - Et vektorpotensial, dersom det finnes, er aldri entydig

# Linjeintegral

$$C: \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, \quad a \leq t \leq b$$

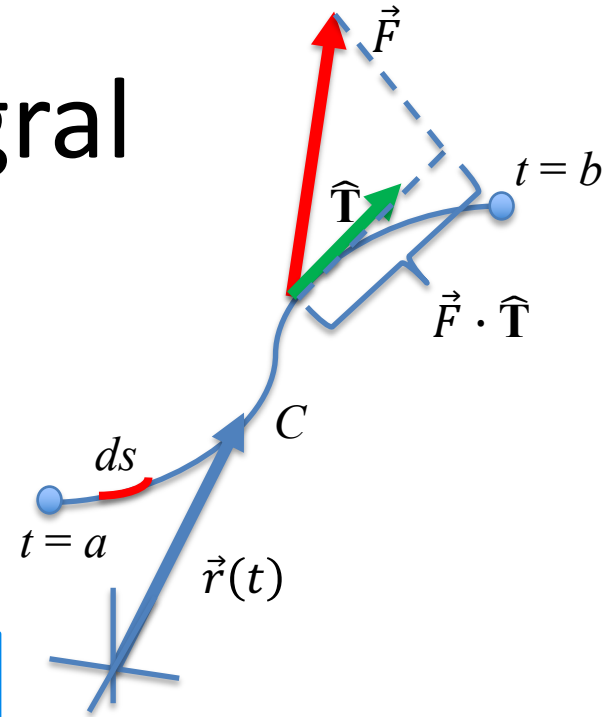
$$ds = |\vec{r}'(t)| dt$$

Type 1: For funksjoner,  $f(x, y, z)$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

Type 2: For vektorfelt,  $\vec{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$

$$\int_C \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$



Arbeid som vektorfeltet gjør langs kurven

# Konservative vektorfelt

## Uavhengighet av veivalg

La  $D$  være et åpent, sammenhengende område og  $\mathbf{F}$  et glatt vektorfelt på  $D$ .

Følgende er ekvivalent:

(a)  $\mathbf{F}$  er konservativt i  $D$ .

(b)  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  for hver stykkevis glatt, lukket kurve  $C$  i  $D$ .

(c)  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  har samme verdi for alle stykkevis glatte kurver  $C$  som forbinder to gitte punkter  $P_0$  og  $P_1$

- Konservativt vektorfelt utfører ikke noe arbeid rundt en lukket kurve
- Konservativt vektorfelt er rotasjonsfrie
- Hvis  $\mathbf{F}$  er konservativt,  $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ , og  $C$  er gitt ved  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , så er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(t_1)) - \varphi(\mathbf{r}(t_0))$$

# Eksamen vår 2013

a) Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}$  gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad \text{for} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

er curlfritt (det vil si,  $\text{curl } \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} = 0$  for alle  $(x, y) \neq (0, 0)$ ).

b) La  $C$  betegne kurven i  $xy$ -planet som starter i  $(1, 0)$  og gjennomløper sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$  nøyaktig én gang, der  $C$  er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds,$$

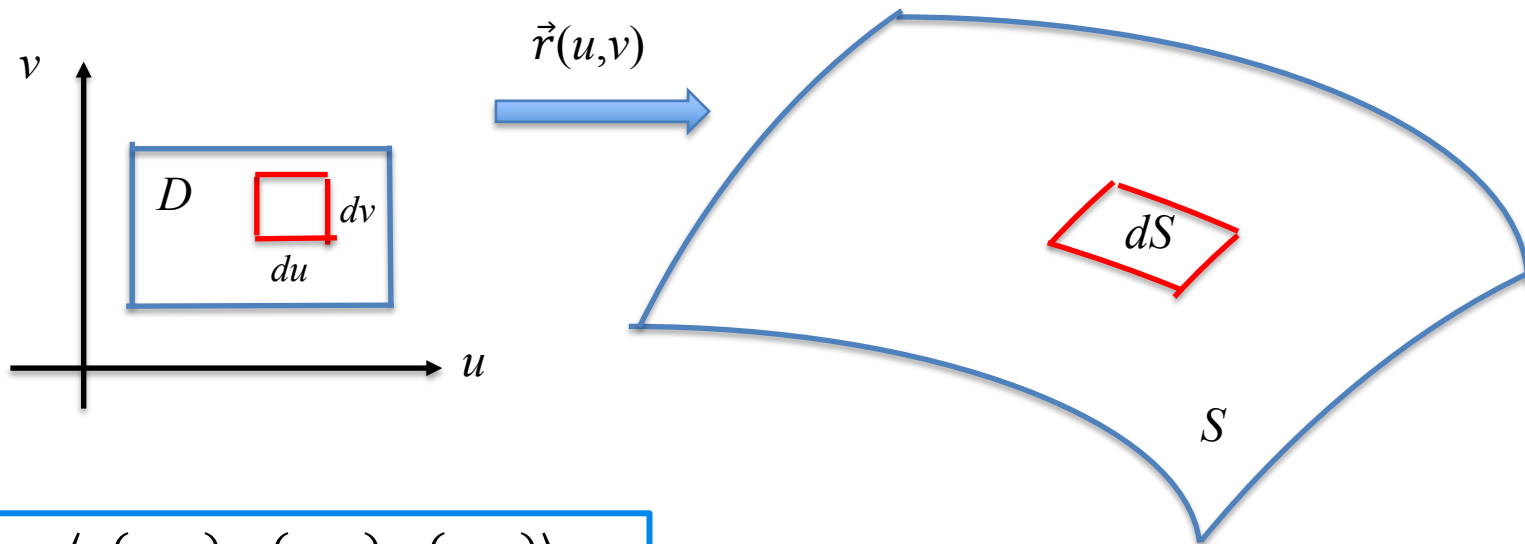
og avgjør hvorvidt  $\mathbf{F}$  er konservativt. Begrunn svaret.

Vektorfeltet er rotasjonsfritt der det er definert, men utfører allikevel et arbeid rundt en lukket kurve som omslutter det singulære punktet  $(0, 0)$ .

Det er altså *ikke* konservativt.

Merk at definisjonsområdet ikke er enkeltsammenhengende.

# Flateintegral for funksjoner

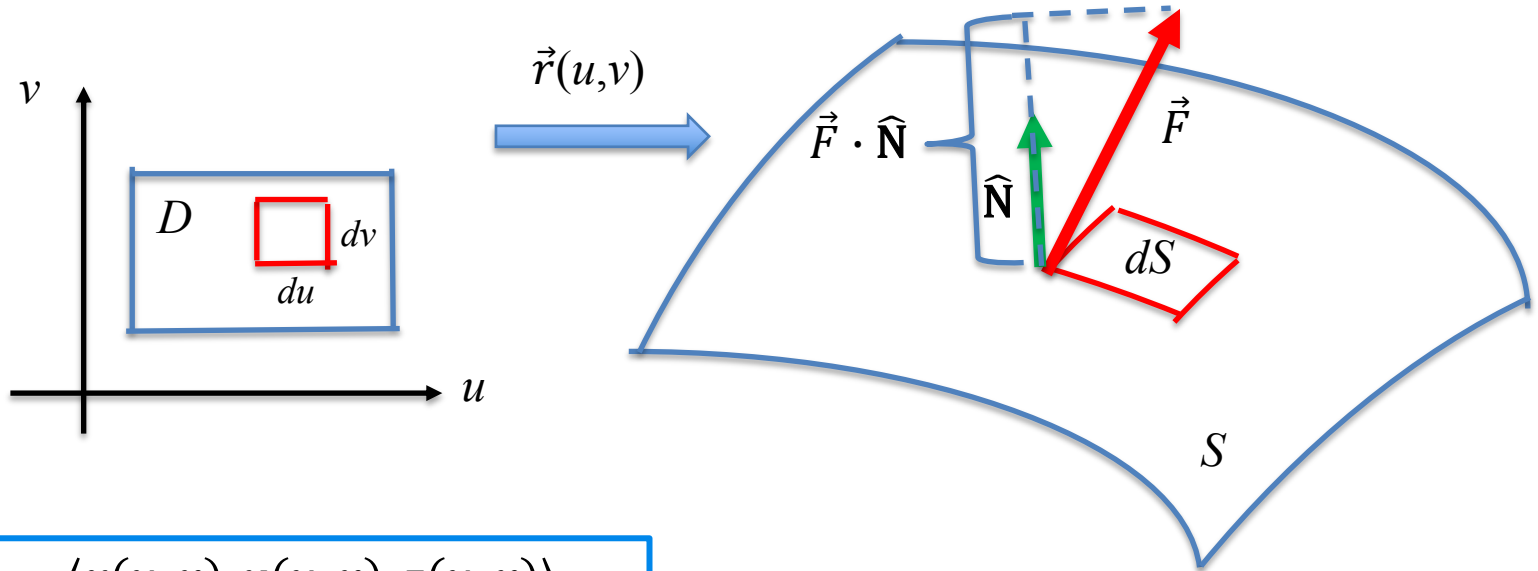


$$S: \vec{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle, \\ (u, v) \in D$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

# Flateintegral for vektorfelt (fluksintegral)



$$S: \vec{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle, \\ (u, v) \in D$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$\hat{N} dS$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

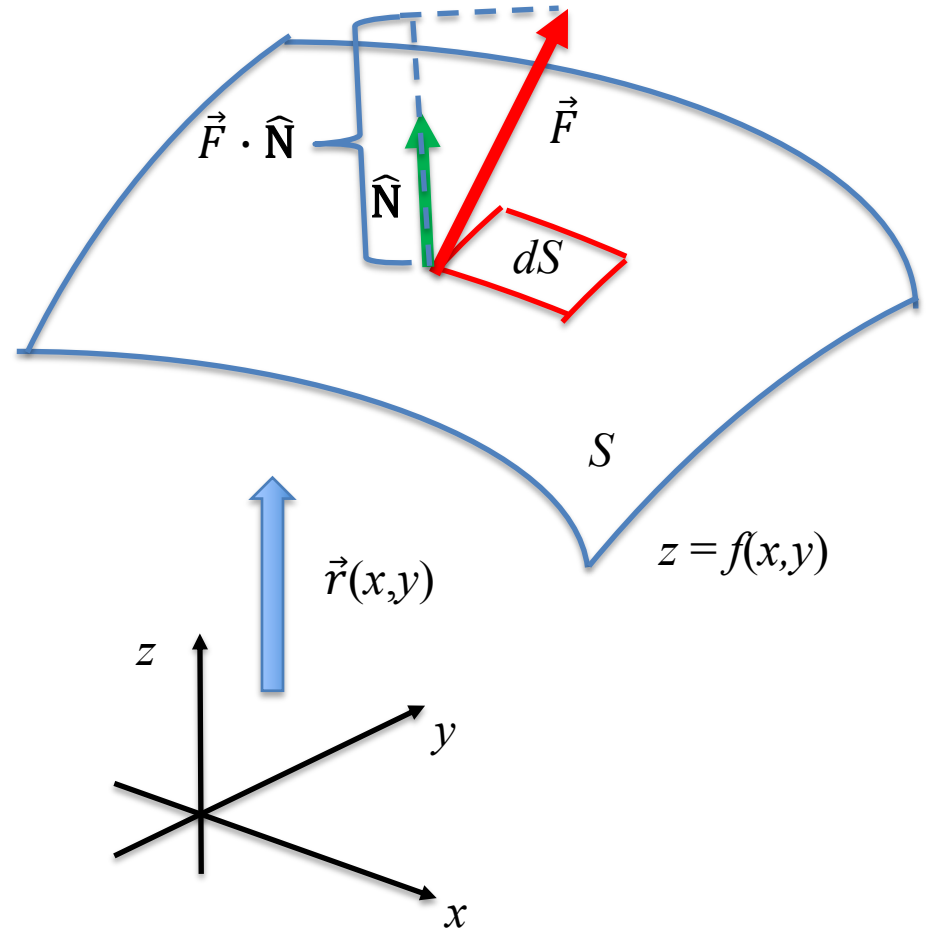
# Viktig spesialtilfelle

Dersom  $S$  kan uttrykkes som  
 $z = f(x,y)$ , dvs.  $S$  kan parametriseres

$$\vec{r}(x,y) = \langle x, y, f(x,y) \rangle$$

så vil

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{N}}dS &= \pm \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \pm \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy\end{aligned}$$



# Fortolkning av fluksintegral

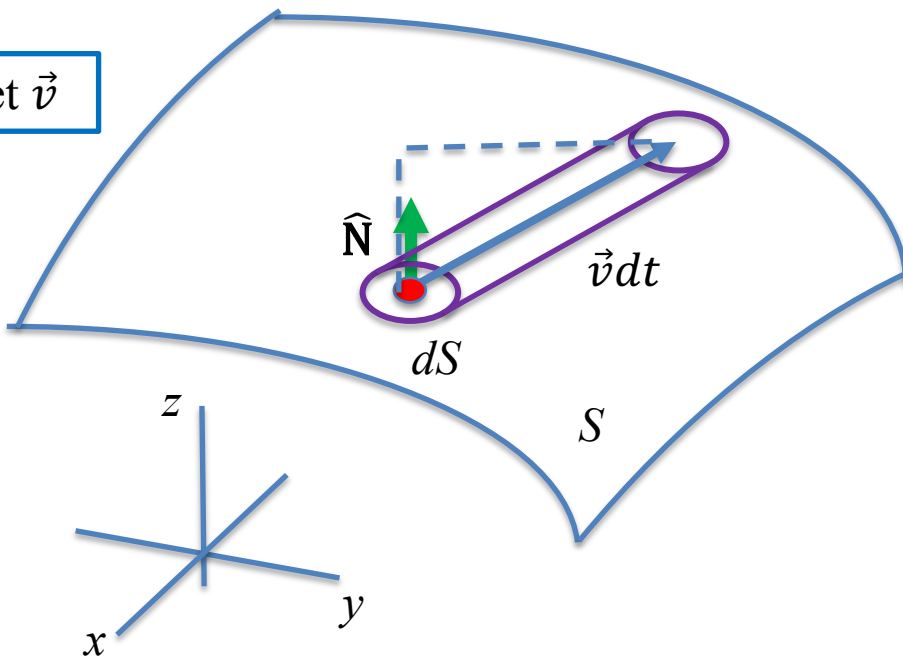
Eks.: Væskestrøm gjennom flata  $S$  med hastighet  $\vec{v}$

Endringsrate til væskevolumet  $V$  gjennom flatelementet  $dS$ :

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Endringsrate til  $V$  gjennom hele  $S$  =  
Fluksen til  $\vec{v}$  gjennom  $S$ :

$$\iint_S \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$



# Fortolkning av divergens

Gitt vektorfelt  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ .  $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$S_r$  er en kule med radius  $r$ , sentrum i origo, ytre enhetsnormalvektor  $\hat{\mathbf{N}}$  og volum lik  $V_r$

Da kan det vises at

$$\operatorname{div} \vec{F}(0,0,0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oiint_{S_r} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS}{V_r}$$

$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) > 0$ :  $(x, y, z)$  er en **kilde**

$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) < 0$ :  $(x, y, z)$  er et **sluk**

# Fortolkning av curl

Eksempel:

$$\text{La } \vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 0). \text{ Da er } \text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

La  $C_r$  være en sirkel med radius  $r$ , sentrum i origo.

Direkte utregning gir  $\oint_{C_r} \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r^2 = 2A_r$ , der  $A_r$  er arealet innenfor  $C_r$ .

Altså har vi at

$$\text{curl } \vec{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\oint_{C_r} \vec{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_r}$$

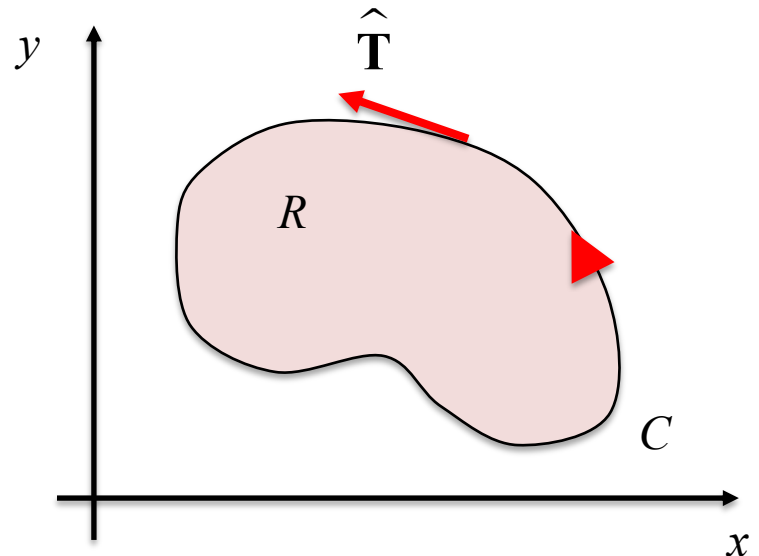
«Sirkulasjon per arealenhet»

# Greens teorem

La  $R$  være et regulært, lukket område i  $xy$ -planet med rand  $C = \partial R$  som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på  $R$ .

Hvis  $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  er et glatt vektorfelt definert på  $R$ , så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



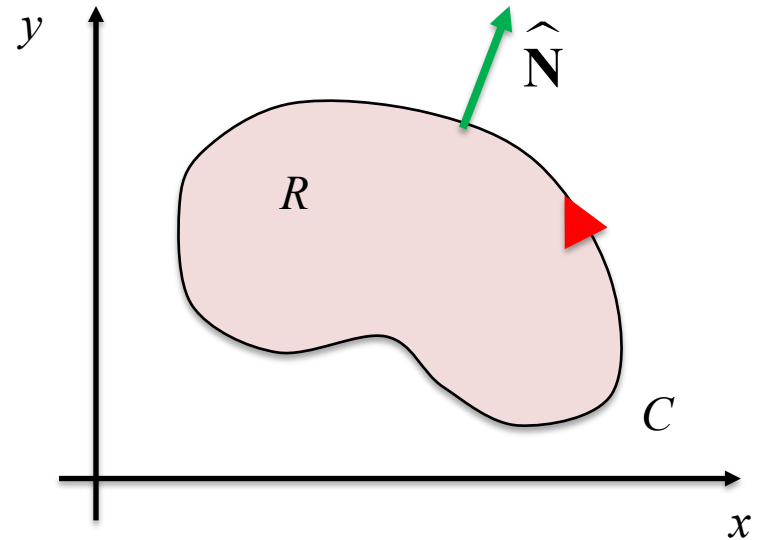
(Regulært område: Område som kan deles opp i områder som både er  $x$ - og  $y$ -enkle)

# Divergensteoremet i planet

La  $R$  være et regulært, lukket område i  $xy$ -planet med rand  $C = \partial R$  som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på  $R$ .

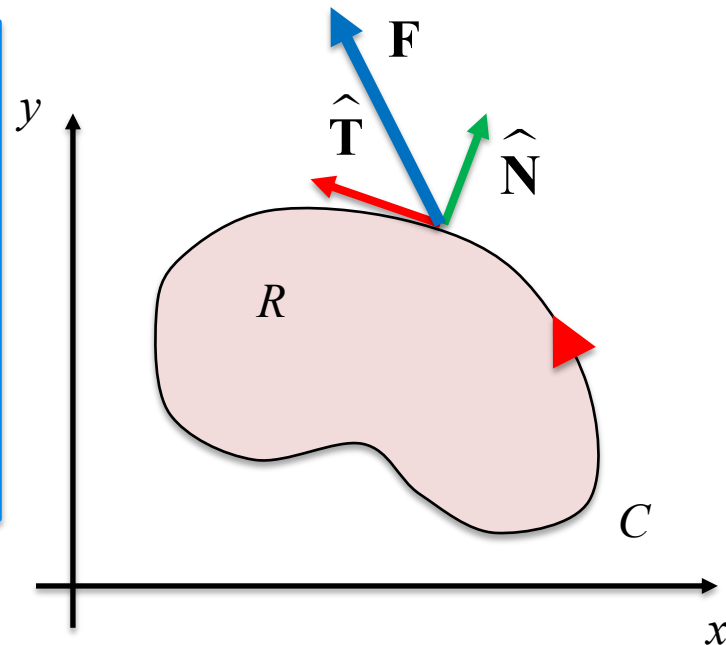
Hvis  $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  er et glatt vektorfelt definert på  $R$ , så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$



La  $R$  være et regulært, lukket område i  $xy$ -planet med rand  $C = \partial R$  som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på  $R$ .

$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  er et glatt vektorfelt definert på  $R$



Divergensteoremet i planet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

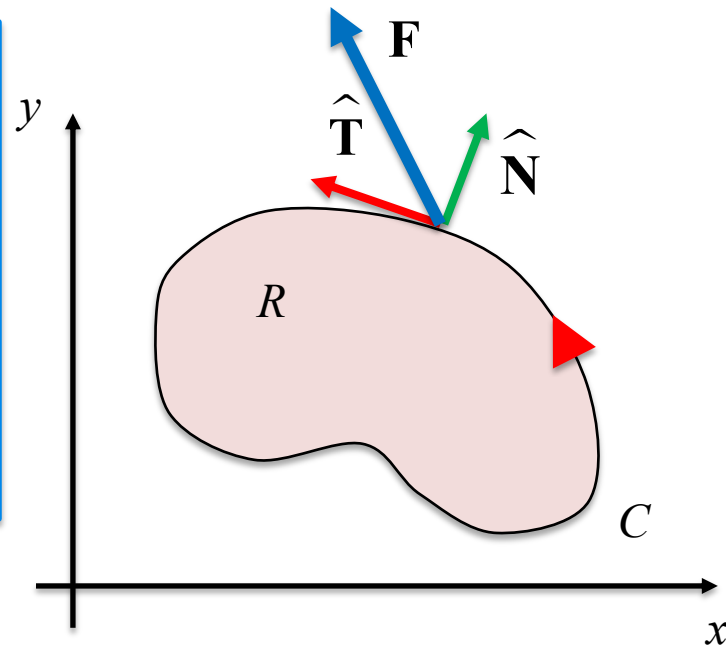
Greens teorem

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La  $R$  være et regulært, lukket område i  $xy$ -planet med rand  $C = \partial R$  som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på  $R$ .

$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  er et glatt vektorfelt definert på  $R$



Divergensteoremet i planet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

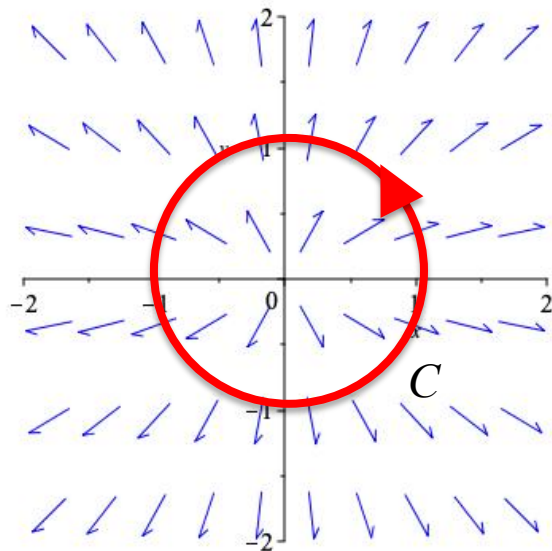
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Greens teorem

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, ds = \iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \vec{k} \, dA$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Rotasjonsfritt  
vektorfelt



$$\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$= \nabla \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

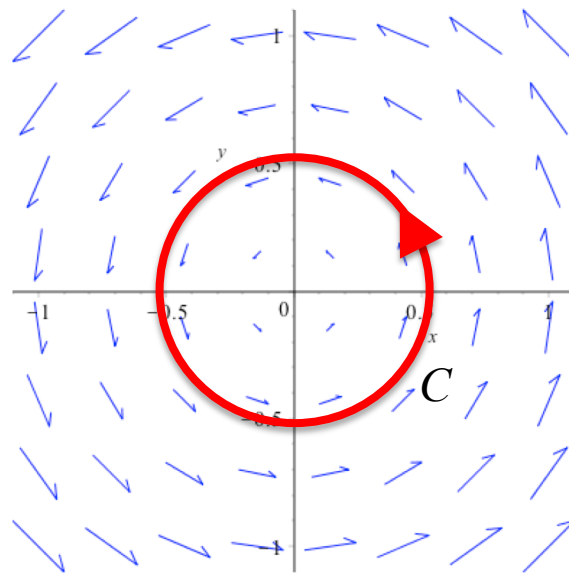
$$\text{curl } \vec{F} = (0, 0, 0)$$

$$\text{div } \vec{F} = 2$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds \neq 0$$

Divergensfritt  
vektorfelt



$$\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

$$= \text{curl}(xz\vec{i} + yz\vec{j})$$

$$\text{curl } \vec{F} = 2\vec{k}$$

$$\text{div } \vec{F} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = 0$$

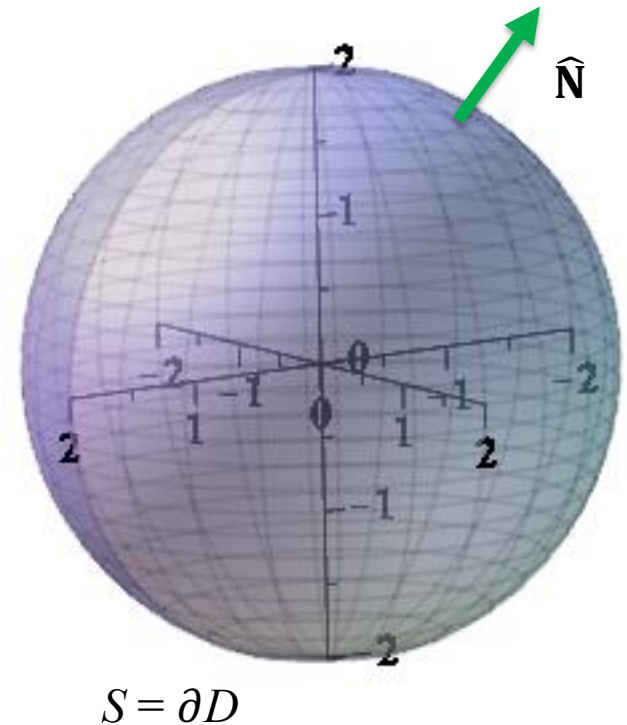
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds \neq 0$$

# Divergensteoremet (Gauss' teorem)

La  $D$  være et regulært område i  $\mathbb{R}^3$  med rand  $S = \partial D$  som er en orientert, lukket flate, med enhetsnormal  $\hat{\mathbf{N}}$  som peker ut av  $D$ .

Hvis  $\mathbf{F}$  er et glatt vektorfelt definert på  $D$ , så er

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

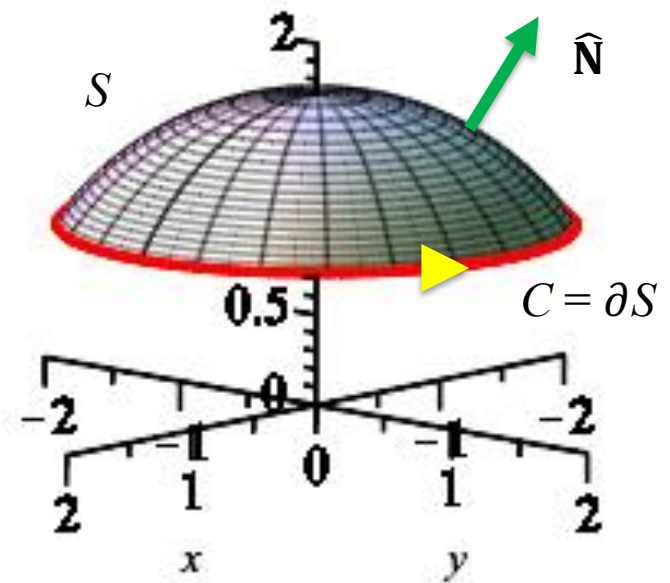


# Stokes' teorem

La  $S$  være en stykkevis glatt, orientert flate i  $\mathbb{R}^3$  med enhetsnormal  $\hat{\mathbf{N}}$ , der randen til  $S$ ,  $C = \partial S$  består av en eller flere stykkevis glatte, lukkede kurver med orientering bestemt av orienteringen til  $S$ .

Hvis  $\mathbf{F}$  er et glatt vektorfelt definert på en åpen mengde som inneholder  $S$ , så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$



## Eksempel

La  $\mathcal{C}$  være trekanten med hjørnepunktene  $(5, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$  og  $(0, 0, 5)$ .

Regn ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{2}{15} xy \, dx + \frac{2}{9} yz \, dy + \frac{2}{25} xz \, dz$$

hvor kurven  $\mathcal{C}$  er orientert med klokka sett fra punktet  $(5, 5, 5)$ .

Svaret skal være et eksakt, rasjonalt tall.

Vil bruke Stokes' teorem og regne ut flateintegralet heller enn linjeintegralet:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$

Dersom  $S$  kan uttrykkes som  $z = f(x, y)$ , så vil  $\hat{\mathbf{N}}dS = \pm \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy$

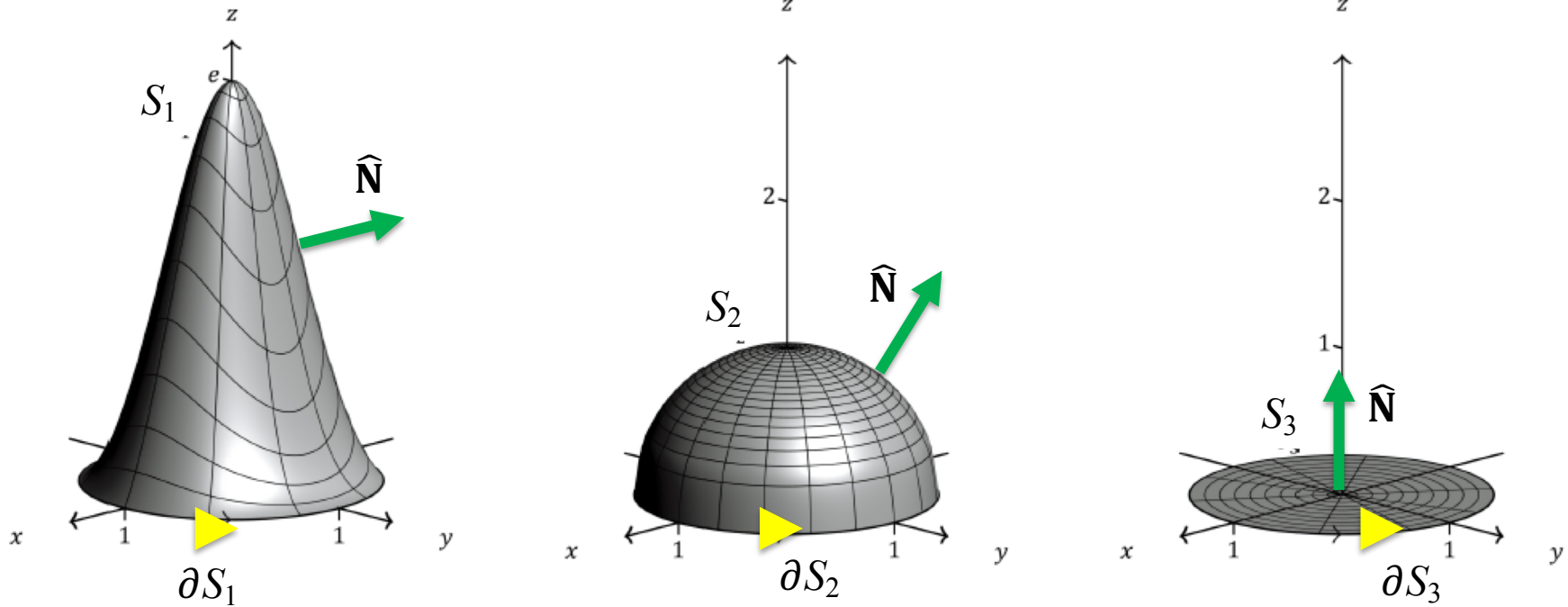
Generelt gjelder, med  $S$  parametrisert ved

$$\vec{r}(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle, \quad (u, v) \in R$$

$$\hat{\mathbf{N}}dS = \pm \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

# Eksempel: Bruk av Stokes' teorem

Flater som har samme rand og induserer samme orientering av randen



$$\oint_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\iint_{S_1} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_2} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_3} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

### Eksempel:

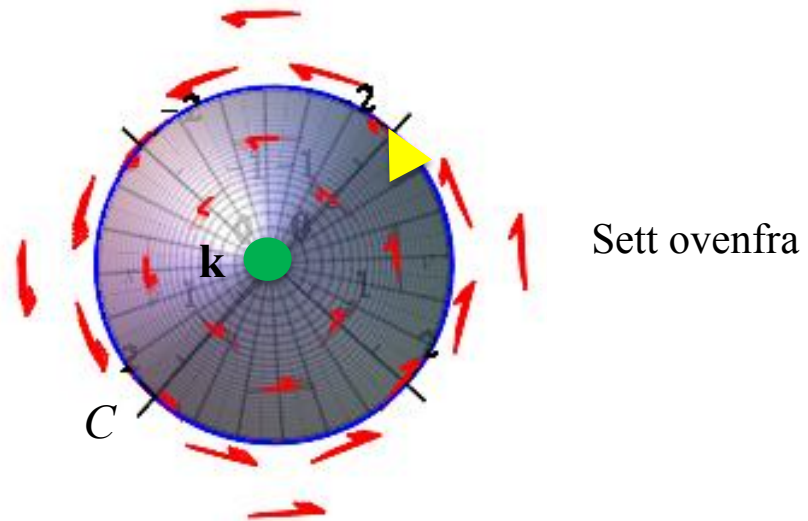
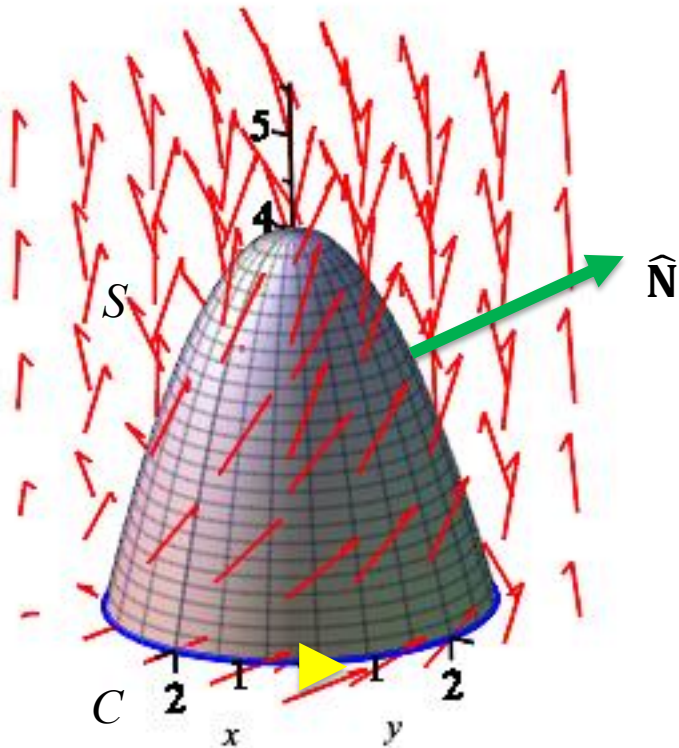
Flaten  $S$  er gitt ved  $z = 4 - (x^2 + y^2)$ ,  $z \geq 0$ , med orientering gitt ved at  $\hat{\mathbf{N}}$  har positiv  $z$ -komponent. Vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt ved  $\vec{F} = (-y, x, 1+z)$ . Da er  $\text{curl } \vec{F} = 2\vec{k}$ .

Finn  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , der  $C = \partial S$  er randa til  $S$ .

$S_2$  er flaten  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $z = 0$ .

Stokes' teorem gir:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \\ &= \iint_{S_2} \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{k} dS = 2 \iint_D dx dy = 8\pi \end{aligned}$$



Hva blir fluksen til  $\vec{F}$  ut av den lukkede flata som består av  $S$  og  $S_2$ ?