TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 8

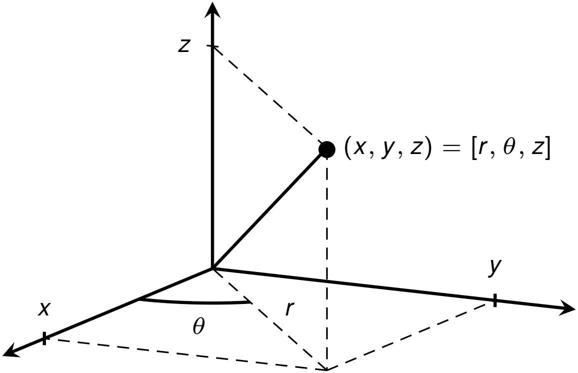
Ole Brevig

Institutt for matematiske fag

Nøkkelbegreper — Uke 9

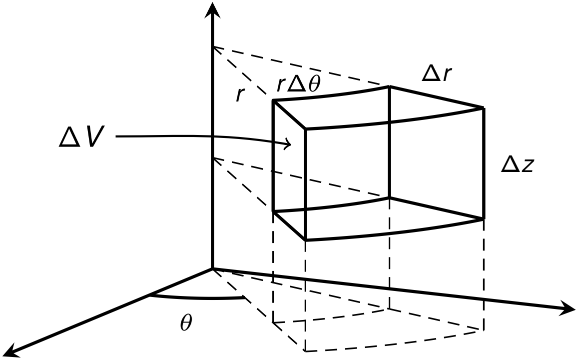
- Variabelskifte for trippelintegraler
  - sylinderkoordinater og kulekoordinater
  - gjennom alminnelige transformasjoner (Jacobi-matrise, Jacobi-determinant)
- Massesenter

Sylinderkoordinater



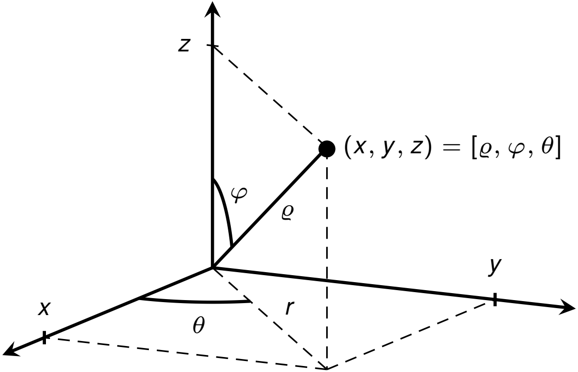
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

Volumelement i sylinderkoordinater



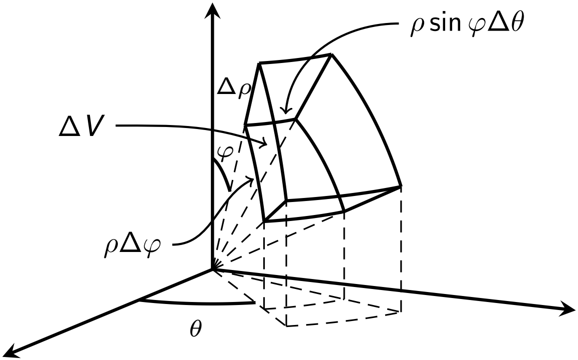
$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater



$$x = \varrho \sin \varphi \cos \theta \qquad y = \varrho \sin \varphi \sin \theta \qquad z = \varrho \cos \varphi$$

Volumelement i kulekoordinater



$$dV = \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta$$

Variabelbytte i trippelintegral

La T være en én-entydig koordinattransformasjon fra et område S i uvw-rommet til et område D i xyz-rommet, gitt ved

$$T(u,v,w) = \big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big).$$

Anta at $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ og $z(u,v,w)$ og deres første ordens partiellderiverte med hensyn på u, v og w er kontinuerlige på S.

Hvis $f(x,y,z)$ er integrerbar på D, og

$$g(u,v,w) = (f \circ T)(u,v,w) = f\big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big)$$

så er

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S g(u,v,w)\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

der Jacobi-determinanten er

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

NTNU

Masse og massesenter

Massen av et romlig legeme T med *massetetthetsfunksjon* $\delta = \delta(x, y, z)$ er gitt ved

$$m = \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x, y, z)\, dV, \qquad dm = \delta\, dV.$$

Massesenteret til T er punktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{R}^3$, hvor

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x\, dm, \qquad \overline{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y\, dm, \qquad \overline{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z\, dm.$$

Dersom $\delta(x, y, z) = 1$, så kalles punktet $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{R}^3$ *sentroiden* til T.