NTNU

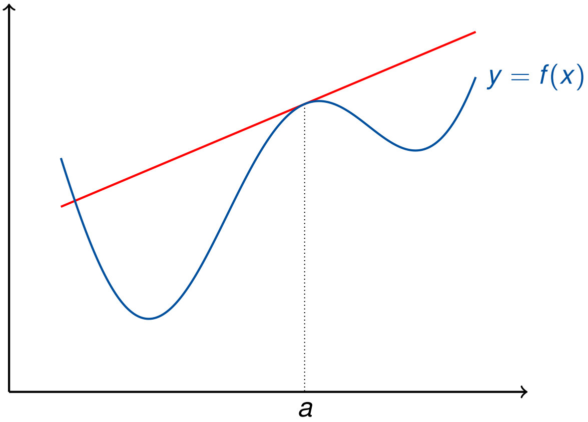
Kunnskap for en bedre verden

TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 3

Ole Brevig

Institutt for matematiske fag

Matematikk 1: Derivert og tangent



$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

(Matematikk 1, Eksamen 2018)

Finn maksimum og minimum av funksjonen

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$$

for $-3 \leq x \leq 3$.

(Matematikk 2, Eksamen 1994)

Finn maksimum og minimum av funksjonen

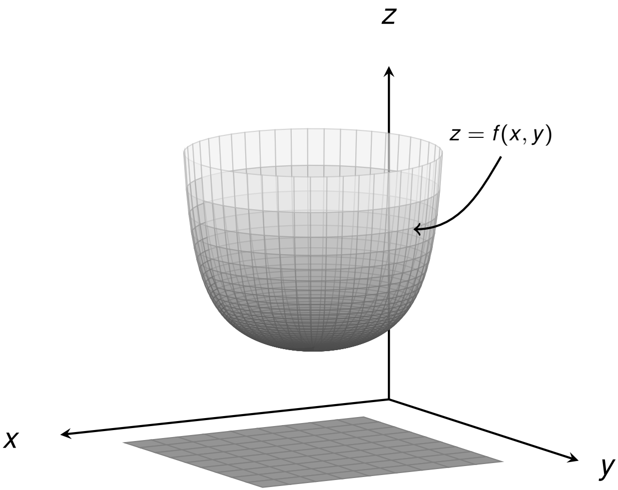
$$f(x, y) = 9x^4 + 16x^2 + 6x^2y^2$$

for $x^2 + 2x + y^2 \leq 0$.

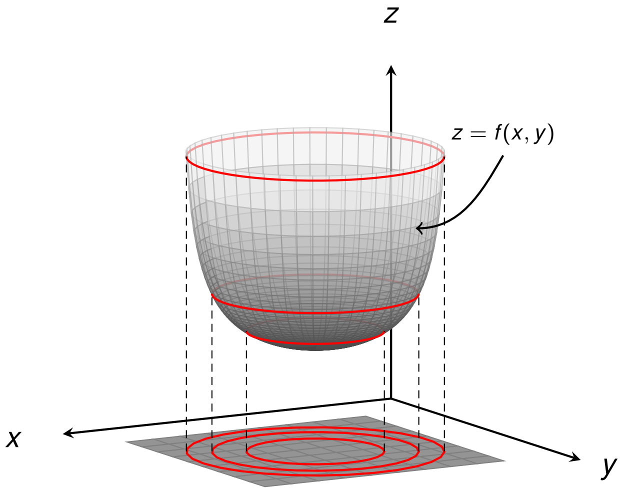
Nøkkelbegreper — Uke 4

- Funksjoner av flere variable
- Nivåkurver og nivåflater
- Grenseverdi
- Kontinuitet
- Partiellderivasjon
- Kvadratiske flater

Grafen til en tovariabel funksjon

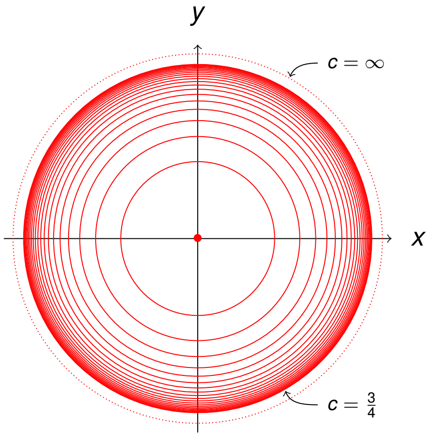


Nivåkurver



For et tall $c \in V_f$ er kurven $f(x, y) = c$ i xy-planet nivåkurven til f i høyde c.

Nivåkurver



Nivåkurver for $c = f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ med $\Delta c = \frac{1}{40}$ fra $c = \frac{1}{4}$.

Definisjon av grenseverdi

Vi sier at L er *grenseverdien* til funksjonen $f(x, y)$ i punktet (a, b), og skriver

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

dersom det

(i) for hver $\varrho > 0$ finnes det minst ett punkt $(x, y) \in D_f$ som oppfyller $0 < |(x, y) - (a, b)| < \varrho$.

(ii) for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at dersom $(x, y) \in D_f$ og $0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta$ så er $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Regneregler for grenseverdier

Anta at $f(x,y) \to L$ og $g(x,y) \to M$ når $(x,y) \to (a,b)$. Da er:

(1) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = L \pm M$$

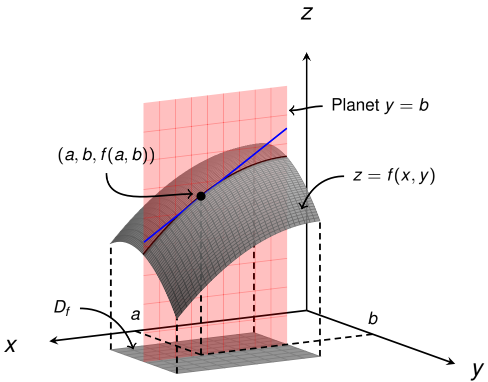
(2) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM$$

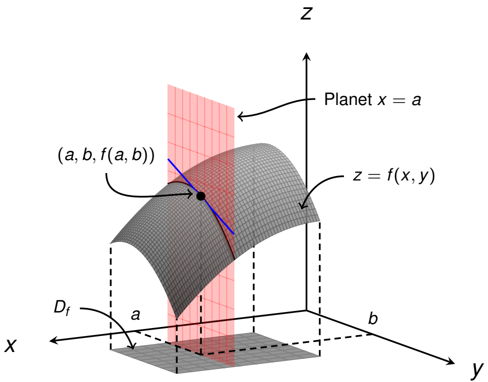
(3) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \qquad (M \neq 0)$$

Dersom F er en funksjon av én variabel som er kontinuerlig, så er:

(4) $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L)$$

Partiellderivasjon

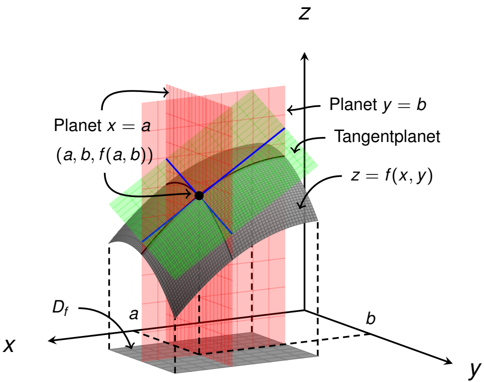


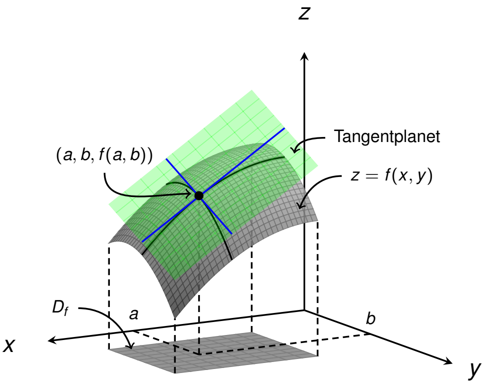


$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Tangentplan





$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$