

TMA 4105 Matematikk 2  
Oversiktsforelesning 12  
Divergensteoremet (16.3-16.4)

Frode Rønning

# Nøkkelpbegreper uke 13

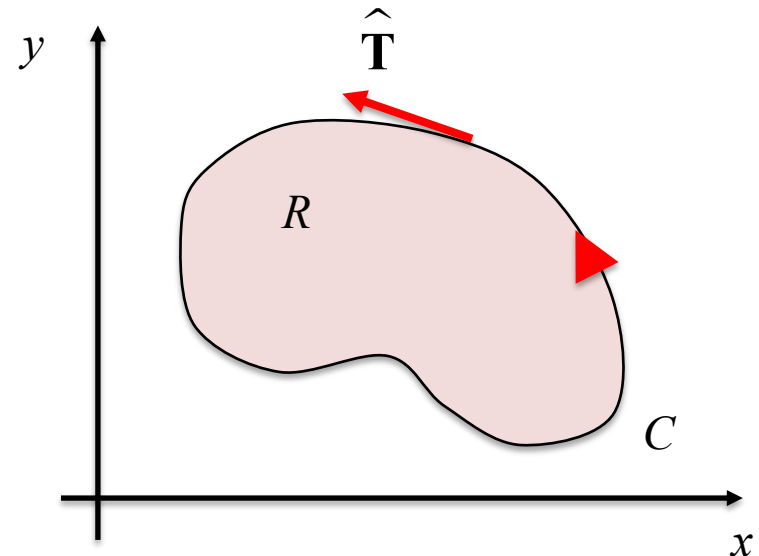
- Divergensteoremet i planet (16.3)
- Divergensteoremet i rommet (16.4)

# Greens teorem (Teorem 6)

La  $R$  være et regulært, lukket område i  $xy$ -planet med rand  $C = \partial R$  som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på  $R$ .

Hvis  $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  er et glatt vektorfelt definert på  $R$ , så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



(Regulært område: Område som kan deles opp i områder som både er  $x$ - og  $y$ -enkle)

# Kommentarer til Greens teorem

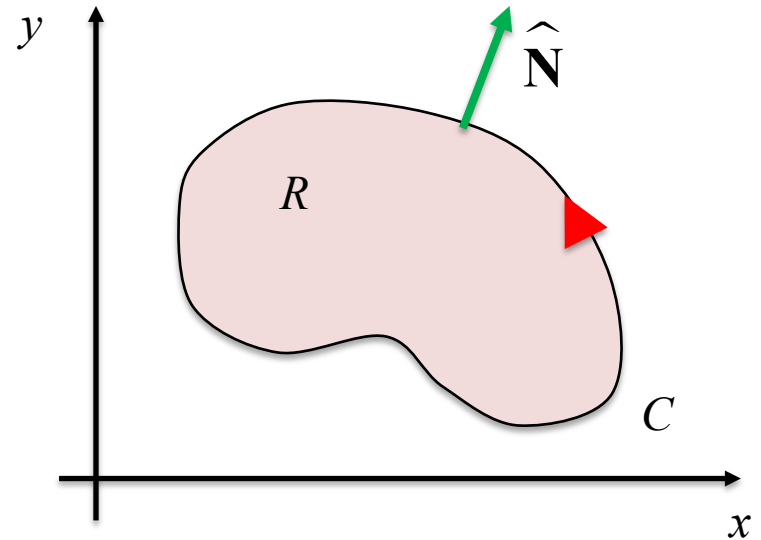
- Greens teorem kan brukes til å finne verdien av et linjeintegral ved å regne ut et dobbeltintegral, eller omvendt. F.eks. kan det være at det er vanskelig å regne ut linjeintegralet direkte, men lett å regne ut det tilhørende dobbeltintegralet.
- Hvis  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$  vil dobbeltintegralet gi arealet av  $R$ . Så ved å velge  $P$  og  $Q$  slik at  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ , vil vi kunne finne arealet av  $R$  ved å regne ut et linjeintegral. Velg f.eks.  $Q = x$  og  $P = 0$ . Da vil  $\oint_C x \, dy$  gi arealet av  $R$ . Tilsvarende kan vi velge  $Q = 0$  og  $P = -y$ . Da vil  $-\oint_C y \, dx$  gi arealet av  $R$ .

# Divergensteoremet i planet (Teorem 7)

La  $R$  være et regulært, lukket område i  $xy$ -planet med rand  $C = \partial R$  som består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på  $R$ .

Hvis  $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  er et glatt vektorfelt definert på  $R$ , så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

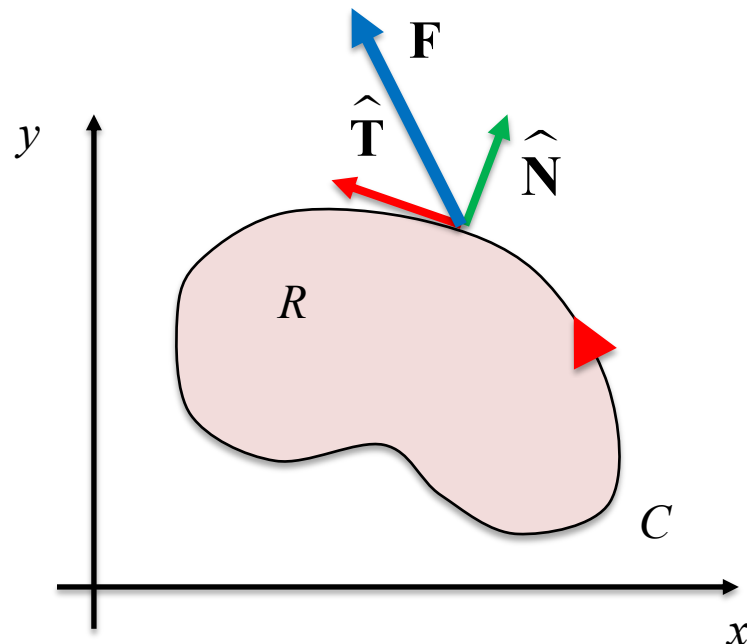


# Kommentarer til Divergensteoremet

- Merk at det som står inne i dobbeltintegralet,  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ , er lik  $\text{div } \mathbf{F}$ . Vi kan da tenke på dobbeltintegralet som «oppsamlet divergens» til  $\mathbf{F}$  inne i  $R$ .
- Linjeintegralet er et fluksintegral, fluksen til  $\mathbf{F}$  *ut av* området  $R$ .
- Teoremet sier da at fluksen til  $\mathbf{F}$  *ut av*  $R$  er lik oppsamlet divergens fra  $\mathbf{F}$  inne i  $R$ .

Greens teorem og Divergensteoremet i planet  
- sammenligning

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y) \vec{i} + Q(x,y) \vec{j}$$



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \iint_R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

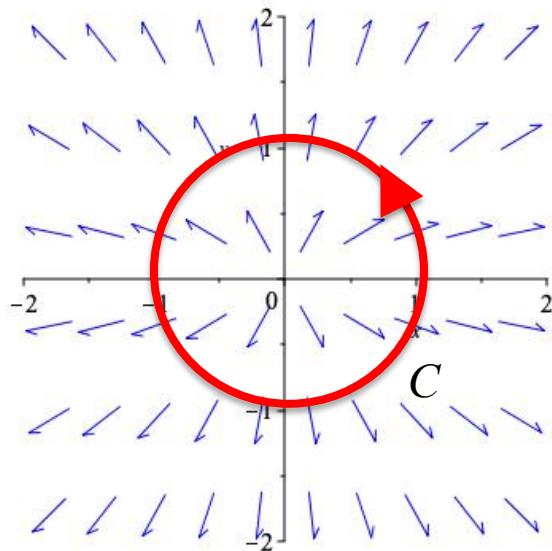
# Sammenligning

- Med  $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  finner vi  $\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathbf{k}$ . Dvs. at det som står inne i dobbeltintegralet i Greens teorem er  $\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$
- Vi kan tenke på dobbeltintegralet som et uttrykk for «oppsamlet curl/virvling» fra  $\mathbf{F}$  inne i  $R$ .
- Linjeintegralet i Greens teorem uttrykket arbeidet som  $\mathbf{F}$  gjør i én rundgang rundt  $C$ .
- Greens teorem sier da at arbeidet som  $\mathbf{F}$  gjør rundt  $C$  er lik oppsamlet virvling fra  $\mathbf{F}$  inne i  $R$ .
- Og Divergensteoremet sier at at fluksen til  $\mathbf{F}$  ut av  $R$  er lik oppsamlet divergens fra  $\mathbf{F}$  inne i  $R$ .

# Flere kommentarer

- Tidligere har vi sett at
  - $\mathbf{F} = \nabla\varphi \implies \text{curl } \mathbf{F} = (0,0,0)$ , altså et konservativt vektorfelt (gradientfelt) er rotasjonsfritt
  - $\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{G} \implies \text{div } \mathbf{F} = 0$ , altså et rent rotasjonsfelt er divergensfritt
- Med referanse til Greens teorem og Divergensteoremet kan vi da si:
  - Et konservativt vektorfelt gjør arbeid = 0 langs en lukket kurve
    - Det visste vi fra før – det er én av egenskapene ved et konservativt vektorfelt.
  - Et divergensfritt vektorfelt har fluks = 0 ut av et lukket område
- De to vektorfeltene på neste lysark er prototyper på henholdsvis et rotasjonsfritt og et divergensfritt vektorfelt.

Rotasjonsfritt  
vektorfelt



$$\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$= \nabla \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

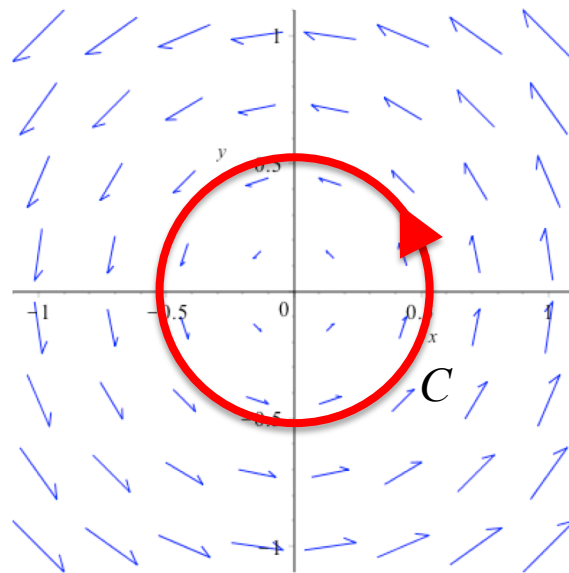
$$\text{curl } \vec{F} = (0, 0, 0)$$

$$\text{div } \vec{F} = 2$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds \neq 0$$

Divergensfritt  
vektorfelt



$$\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

$$= \text{curl}(xz\vec{i} + yz\vec{j})$$

$$\text{curl } \vec{F} = 2\vec{k}$$

$$\text{div } \vec{F} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = 0$$

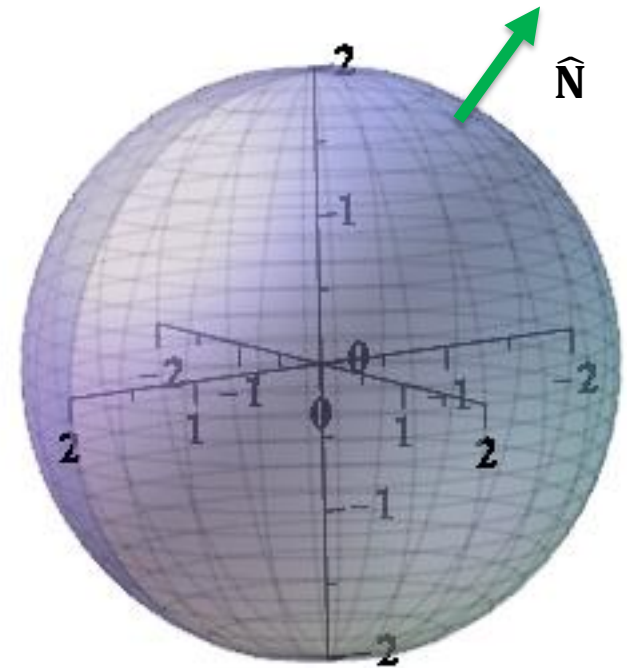
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds \neq 0$$

# Divergensteoremet (Gauss' teorem)

La  $D$  være et regulært område i  $\mathbb{R}^3$  med rand  $S = \partial D$  som er en orientert, lukket flate, med enhetsnormal  $\hat{\mathbf{N}}$  som peker ut av  $D$ .

Hvis  $\mathbf{F}$  er et glatt vektorfelt definert på  $D$ , så er

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS$$



$S = \partial D$

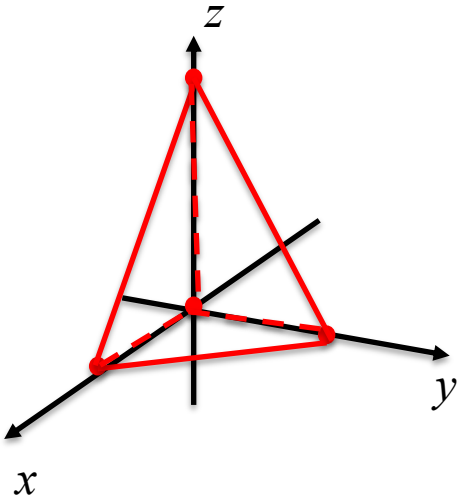
### Eksempel:

La  $T$  være tetraederet med hjørner i  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  og  $(0,0,2)$ .

Vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt ved  $\vec{F} = (2xz, 0, (x-1)^2)$ . La  $S = \partial T$ .

$\hat{\mathbf{N}}$  er enhetsnormalvektor til  $S$  som peker ut av  $T$ .

Finn fluksen til  $\vec{F}$  utover gjennom flaten  $S$ :  $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ .



$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV = \frac{1}{3}$$

Finn så fluksen til  $\vec{F}$  ut gjennom det skrå planet som går gjennom punktene  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  og  $(0,0,2)$ . Kall denne flaten  $S_1$ .

Dvs. finn  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$

1. Flukksen til  $\vec{F}$  ut gjennom hele  $S$  finner vi ved Divergensteoremet.

$\operatorname{div} \vec{F} = 2z$ . Det skrå planet som danner taket i legemet finner vi har likning  $z = 2 - 2x - 2y$

Dermed blir

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint 2z dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2x-2y} 2z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2-2x-2y)^2 dy dx$$

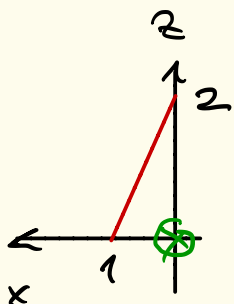
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2-2x} u^2 du dx$$

$$u = 2 - 2x - 2y$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 [u^3]_0^{2-2x} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{3}$$

2. Finn flukksen til  $\vec{F}$  ut gjennom det skrå planet,  $S_1$ .

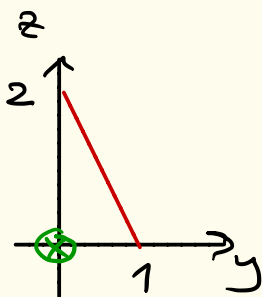
Se på de tre andre flatene som legemet består av



$$\hat{N} = (0, -1, 0)$$

$$\vec{F} = (2xz, 0, (x-1)^2)$$

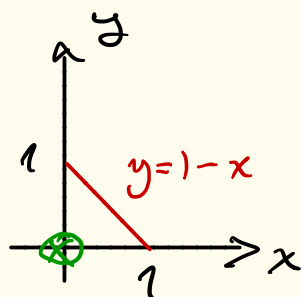
$$\vec{F} \cdot \hat{N} = 0$$



$$\hat{N} = (-1, 0, 0)$$

$$\vec{F} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{F} \cdot \hat{N} = 0$$



$$\hat{N} = (0, 0, -1)$$

$$\vec{F} = (0, 0, (x-1)^2)$$

$$\vec{F} \cdot \hat{N} = -(x-1)^2$$

Det eneste bidraget til flukksen fra disse flatene kommer altså fra trekanten i  $xy$ -planet (kall den  $S_2$ )

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = - \int_0^1 \int_0^{1-x} (x-1)^2 dy dx$$

$$= - \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{4} [(1-x)^4]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

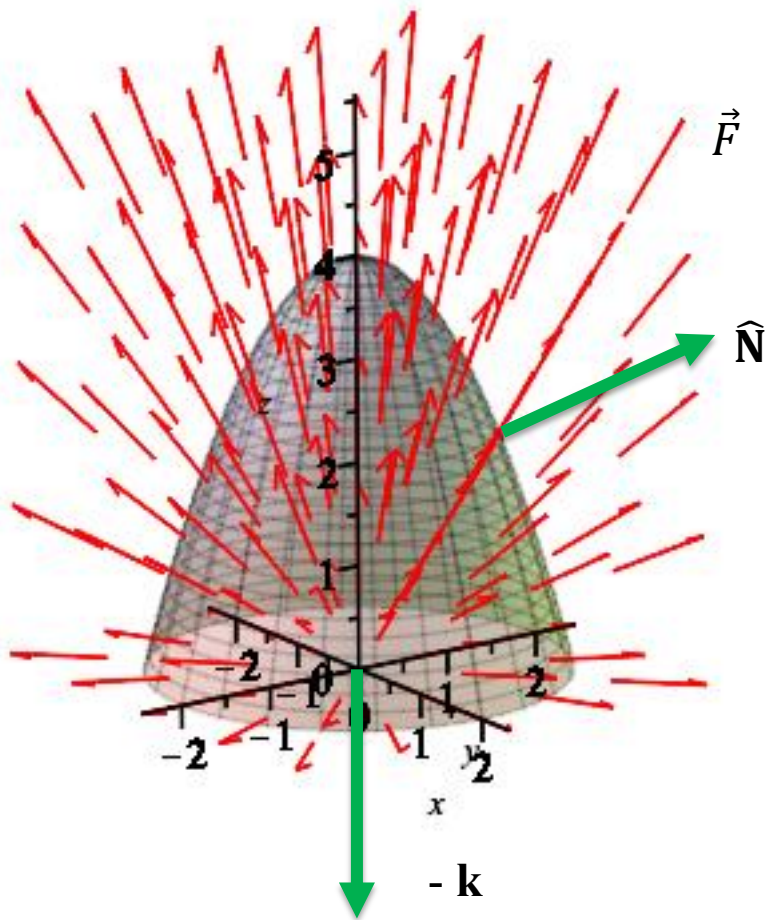
3. Til slutt får vi da

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS &= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS \\ &= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

### Eksempel fra forrige uke:

Flaten  $S$  er gitt ved  $z = 4 - (x^2 + y^2)$ ,  $z \geq 0$ , og vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt ved  $\vec{F} = (x, y, z)$ .

Finn fluksen til  $\vec{F}$  ut av flaten  $S$ ,  $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$  der  $\hat{\mathbf{N}}$  er enhetsnormalvektor til  $S$  med positiv  $z$ -komponent. Vi fant at denne var lik  $24\pi$ .



Lukk flaten ved å legge til bunnen,  $S_2$ , dvs. sirkelskiven  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $z = 0$ .

Fluksen til  $\vec{F}$  ut av flaten  $S_2$  er

$$-\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \mathbf{k} dS = 0.$$

Hvis vi kaller den lukkede flaten som består av  $S$  og  $S_2$  for  $S_1$  vil da

$$\oiint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 24\pi$$

$$V(T) = \iint_D (4 - (x^2 + y^2)) dx dy = 8\pi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3$$

$$\text{Så } \oiint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 24\pi = \operatorname{div} \vec{F} \cdot V(T)$$

Hvilken sammenheng kan ligge bak dette?

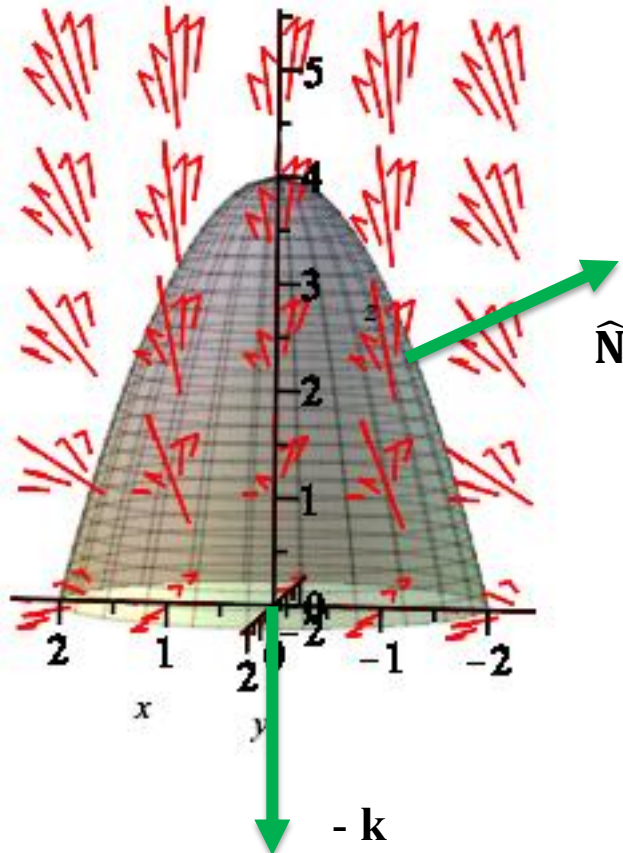
# Kommentar

- Den sammenhengen som antydes i den nederste boksen på forrige ark kommer fra Divergensteoremet.
- Siden  $\operatorname{div} \vec{F}$  er konstant (lik 3) vil vi ved Divergensteoremet få at fluksen ut gjennom hele overflata blir 3 ganger volumet til legemet.
- Jeg så etterpå at i det lysarket som jeg brukte på videoen var det noe inkonsekvens i notasjonen for vektorfeltet. Jeg hadde der vekslet litt mellom  $\vec{F}$  og  $\mathbf{F}$ . Nå har jeg konsekvent brukt  $\vec{F}$ .

### Eksempel fra forrige uke – litt endret:

Flaten  $S$  er gitt ved  $z = 4 - (x^2 + y^2)$ ,  $z \geq 0$ , og vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt ved  $\vec{F} = (0.1x^2, y, 0.2z)$ . Da er  $\text{div } \vec{F} = 0.2x + 1.2$

Finn fluksen ut av flaten  $S$  for dette vektorfeltet,  $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$  der  $\hat{\mathbf{N}}$  er enhetsnormalvektor til  $S$  med positiv  $z$ -komponent.



Lukk flaten ved å legge til bunnen,  $S_2$ , og kall den lukkede flaten  $S_1$ .

Fluksen til  $\vec{F}$  ut av flaten  $S_2$  er

$$-\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \mathbf{k} dS = 0.$$

Divergensteoremet gir:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \oiint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &= \iiint_T \text{div } \vec{F} dV = \iiint_T (0.2x + 1.2) dV \\ &= \iiint_T 0.2x dV + 1.2 V(T) \end{aligned}$$

= 0

Se figuren

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2z$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV$$

$$= 2 \iiint_T z dV = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2x-2y} z dz$$

$$= 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{2-2x-2y} dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \underbrace{(2-2x-2y)^2}_{=u} dy dx$$

$$du = -2 dy$$

$$y=0 \text{ gilt } u=2-2x$$

$$y=1-x \text{ gilt } u=0$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{2} \int_{2-2x}^0 u^2 du dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (2-2x)^3 dx = \frac{8}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

Med  $\vec{F}(x, y, z) = 0,1x^2\vec{i} + y\vec{j} + 0,2z\vec{k}$   
blir  $\operatorname{div} \vec{F} = 0,2x + 1,2$ . Altså  
ikke lenger konstant.

Fortsatt er flukksen gjennom  
bunnen lik 0, så fluksen  
gjennom den krumme delen  
av overflata er lik  
fluksen gjennom hele. Den  
kan vi finne ved hjelp av  
Divergensteoremet.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

$$= \iiint_T (0,2x + 1,2) \, dV$$

$$= \iiint_T 0,2x \, dV + 1,2 \operatorname{Volum}(T)$$

Vi regner videre på det første leddet (sylinderkoordinater)

$$\iiint_T x \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} \underbrace{r \cos \theta}_x \underbrace{r \, dz \, dr \, d\theta}_{dV}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2) r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{4}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right]_0^2 \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{64}{15} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$$

Totalt får vi da  $\iint_S \vec{E} \cdot \hat{N} \, dS = 1,2 \, \text{V}$   
 $= 1,2 \cdot 8\pi$

Det integralet som blir 0 representerer fluksen i x-retning. At den blir 0 kan vi se fra figuren fordi pilene går inn i legemet fra høyre og ut igjen mot venstre.

Og siden  $F_1 = 0,1x^2$  er verdien den samme for negative som for positive  $x$ . Det går altså like mye ut som inn, altså netto fluks = 0 i x-retningen