Oppgave 1 Alternativ (iii) uttrykker tangentplanet til den angitte flata i punktet $(1, -1, 2)$. Alle planene inneholder punktet $(1, -1, 2)$, men bare alternativ (iii) har riktig normalvektor, $(5, -2, 4)$.

Vurdering: 10 poeng for korrekt valg. 0 poeng for galt valg.

Oppgave 2 Funksjonen gitt ved uttrykk (iv) kan gjøres kontinuerlig i $(0, 0)$ ved å definere $f(0, 0) = 1$. Dette følger av at $\lim_{t \to 1} \frac{\sin t}{t} = 1$. For alle de andre funksjonene er det mulig å finne ulike veier inn til origo som gir ulik grenseverdi, eller at grenseverdien ikke eksisterer for noe veivalg.

Vurdering: 10 poeng for korrekt valg. 0 poeng for galt valg.

Oppgave 3

(i) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ svarer til illustrasjon A.

(ii) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ svarer til illustrasjon B.

(iii) $f(x, y) = 2y^2 - x^2$ svarer til illustrasjon C.

(iv) $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ svarer til illustrasjon D.

(v) $f(x, y) = y^2 - x^2$ svarer til illustrasjon E.

En måte å se sammenhengen på kan være å se etter skjæringspunkter mellom nivåkurvene og koordinataksene og å se på asymptotene til nivåkurvene.

Vurdering: 2 poeng for hvert korrekte valg. 0 poeng for gale valg.

Oppgave 4 Massen finnes ved å regne ut dobbeltintegralet av tetthetsfunksjonen over området D. Det vil gi enklest regning å danne et iterert integral der vi integrerer i x-retningen først. Da får vi

$$M = \iint_D (1 + y) dA = \int_0^2 \int_{-y^2}^{4-y^2} (1 + y) dx dy = 4 \int_0^2 (1 + y) dy = 16.$$

Vurdering: Det itererte integralet med grenser må gå frem av besvarelsen, i tillegg til det endelige svaret. Max 10 poeng.

Oppgave 5 Partiell derivasjon av uttrykket $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$ gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

De kritiske punktene får vi når begge disse partielle deriverte er lik 0. Altså vi får punktene $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Utregning av andre ordens partielle deriverte gir

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy(3-2x^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xy(3-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

og

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1-2xy)(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Andrederiverttesten brukt på uttrykket $AB - C^2$ gir da at $(0,0)$ er et salpunkt, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ er lokale max-punkter, og $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ er lokale min-punkter.

Vurdering: Det må gå fram av besvarelsen hvordan de kritiske punktene har kommet fram. Uttrykkene for de partielle deriverte er relevante mellomsvar. Videre må det gå fram hvordan andrederiverttesten er brukt for å klassifisere punktene. Max 10 poeng.

Oppgave 6 Her vil det trolig være greiest å bruke Divergensteoremet. Med $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3 - x^2y^2)\mathbf{i} + (\frac{2}{3}xy^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ blir div $\mathbf{F} = 1$. La T være den lukkede flata som består av S og sirkelskiva D gitt ved $x^2 + y^2 \leq 1$ og $z = 2$. La ∂T betegne hele randa til T. Da får vi, ved bruk av sylinderkoordinater,

$$\iiint_{\partial T} \text{div } \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+r^2}^2 dzrdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) rdrd\theta = 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)dr = \frac{\pi}{2}.$$

Ved Divergensteoremet blir denne verdien lik fluksen til $\mathbf{F}$ ut av den lukkede flata T. For å få fluksen ut av S må vi trekke fra fluksen gjennom D i retningen $\mathbf{k}$. Denne blir

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dA = 2\pi.$$

Dermed får vi $\iint_S \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} dS = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$.

Vurdering: Hvis oppgaven løses på denne måten, må det sies at Divergensteoremet brukes og at div $\mathbf{F} = 1$. Videre må det gå fram at man trekker fra fluksen gjennom lokket på den lukkede flata for å få den fluksen som det er spurt etter. Max 10 poeng.

Oppgave 7 For å vise at vektorfeltet er konservativt er det antakelig greiest å påvise at det finnes en potensialfunksjon $\varphi(x, y, z)$. Hvis en slik finnes, så må

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2x + y\sin(xy)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x\sin(xy) + z\cos(yz)$$

og

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y\cos(yz).$$

Ved å integrere disse tre uttrykkene henholdsvis med hensyn på x, y og z og sammenholde resultatene, finner vi at alle er tilfredsstilt dersom vi velger $\varphi(x, y, z) = \sin(yz) - \cos(yz) - x^2$. Når vi nå vet at vektorfeltet er konservativt, så vet vi at linjeintegralet av vektorfeltet er uavhengig av veivalg. Dette betyr at vi får

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(\pi/2)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) = \varphi(\pi/2, 1, \pi/2) - \varphi(0, 0, 0) = 2 - \frac{\pi^2}{4}.$$

Vurdering: Hvis oppgaven løses på denne måten, må uttrykket for potensialfunksjonen framgå av besvarelsen. Videre må det sies at siden vektorfeltet er konservativt, så kan linjeintegralet finnes ved å regne ut verdien til potensialfunksjonen i endepunktene av kurven. Max 10 poeng.

Oppgave 8 Utregning gir

$$V_t = \int_0^t \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2(y+2)^2} dy dx = \frac{1}{4} \int_0^t \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{4} \frac{t}{1+t}.$$

Videre utregning gir at $V_t = \frac{1}{5}$ for $t = 4$. Funksjonen $\frac{t}{1+t}$ er monotont voksende, så dermed er $V_t \geq \frac{1}{5}$ for $t \geq 4$. $T = 4$ er dermed det minste positive tallet som gjør $V_t \geq \frac{1}{5}$ for alle $t \geq T$.

Vurdering: Her må uttrykket for V_t framgå av svaret. Videre må det være med en kommentar om at dette uttrykket er monotont voksende som funksjon av t. Så må verdien $T = 4$ angis. Max 10 poeng.

Oppgave 9 Her vil nok det greieste være å bruke Stokes' teorem. Utregning gir curl $\mathbf{F} = (0, -\frac{1}{2}x, 0)$. Kurven $\mathcal{C}$ ligger i planet gitt ved $2x + 2y + z - 2 = 0$. Den oppgitte orienteringen til $\mathcal{C}$ gir at $\widehat{\mathbf{N}}dS = (-2, -2, -1)dxdy$. Stokes' teorem gir da, der T er trekanten som har $\mathcal{C}$ til rand,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \text{curl } \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}dS = \int_0^1 \int_0^{1-y} xdxdy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 dy = \frac{1}{6}.$$

Vurdering: Hvis oppgaven løses på denne måten, må uttrykket for curlen framgå av besvarelsen. Videre må det sies at Stokes' teorem brukes til å skrive om til et flateintegral, som skrives om til et iterert integral. Max 10 poeng.

Oppgave 10 Høyden fra bunnen og opp til åpningen, H, finnes ved å bruke Pytagoras' setning: $H^2 + 2^2 = 4^4$. Dette gir $H = 2\sqrt{3}$. Siden vannet står halvveis opp i beholderen blir høyden fra bunnen og opp til vannflata lik $\sqrt{3}$.

Volumet av vannet i beholderen kan finnes på mange måter. En måte er følgende: Man kan se for seg en sylinder av vann med radius 2 og høyde $\sqrt{3}$ innerst i beholderen. Denne har da volum $4\pi\sqrt{3}$. Volumet av vannet utenfor denne sylinderen kan regnes ut ved å bruke sylinderkoordinater i følgende itererte integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_2^{\sqrt{13}} \int_{-\sqrt{16-r^2}}^{-\sqrt{3}} dzrdrd\theta.$$

Her er $z = 0$ satt langs kanten av beholderen. Da vil vannflata ligge på $z = -\sqrt{3}$ og veggen i beholderen vil ligge på $z = -\sqrt{16 - r^2}$. Dette gir z-grensene i integralet ovenfor. Grensene for r fås fra sammenhengen $z = -\sqrt{16 - r^2}$ slik at på vannoverflata, der $z = -\sqrt{3}$, blir $r = \sqrt{13}$. Utregning av integralet I ovenfor gir $5\pi\sqrt{3}$ slik at det totale volumet blir $9\pi\sqrt{3}$.

Det er også mulig å regne ut volumet ved å tenke seg sirkelformede skiver fra bunnen og opp til vannflata. La h betgne høyden fra bunnen i beholderen og $r = r(h)$ betegne radius av den sirkelformede vannflata i høyden h. Ved bruk av Pytagoras' setning får vi $r^2 + (2\sqrt{3} - h)^2 = 16$, som gir $r^2 = 16 - (2\sqrt{3} - h)^2$. La dh betegne tykkelsen av en slik sirkelformet skive. Den vil da ha volum $dV = \pi r^2 dh = \pi(16 - (2\sqrt{3} - h)^2)dh$. Vi får dermed volumet av vannet ved å regne ut følgende integral:

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (16 - (2\sqrt{3} - h)^2)dh = 9\sqrt{3}\pi.$$

Vurdering: Her må det være med tilstrekkelig med forklaringer og mellomsvar til at det går an å se hvordan det er tenkt. Bare sluttsvar gir ingen uttelling. Utregningen av volumet teller mest. Max 10 poeng.