Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 8, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

17. februar 2020

Gaussintegralet

Merk at $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}$. Det holder derfor å vise at $\int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. La $I := \int_0^{\infty} e^{-x^2}$. Det er klart at $I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\ dx\ dy$. Bruk av polarkoordinater gir at dette siste integralet er $(\pi/2)\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\ dr = (\pi/2)(-e^{-r^2}/2)|_0^{\infty} = \pi/4$ slik at $I^2 = \pi/4$. Tar vi roten får vi det vi ønsket å vise.

14.4.7

Det letteste er kanskje å bytte til polarkoordinater. Siden vi skal integrere over en kvartdisk i første kvadrant finner vi dermed:

$$\iint_Q y\ dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^a r^2\sin(\theta)\ dr\ d\theta = \int_0^a r^2\ dr = \frac{a^3}{3}. \tag{1}$$

14.5.29

Gjennomsnittverdien til $f = f(x, y, z)$ over R er gitt ved:

$$\bar{f}|_R = \frac{1}{V(R)}\iiint_R f\ dV \tag{2}$$

der $V(R)$ betegner volumet til R. Hvis R er enhetskuben er $V(R) = 1$ og vi ender opp i det tilfellet også $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ med

$$\bar{f}|_R = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2 + y^2 + z^2\ dx\ dy\ dz = \int_0^1\int_0^1 (1/3) + y^2 + z^2\ dy\ dz = \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1. \tag{3}$$

Kjente formler

- Volumet av sylinder med høyde h og radius r:

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq r^2} h\ dA = h\text{Areal}(\{x^2 + y^2 \leq r^2\}) = \pi r^2 h. \tag{4}$$

- Kule med radius R: se på $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Volumet til kula vi vil ha er da to ganger volumet av z over disken $x^2 + y^2 \leq R^2$. Det vil si:

$$V = 2\iint_{x^2+y^2\leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ dA. \tag{5}$$

Bruk av polarkoordinater gir dermed:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}\ dr\ d\theta = 4\pi\int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}\ dr = \frac{4\pi}{3}R^3. \tag{6}$$

- Volum av kjegle med radius r og høyde h: la $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ der $x^2 + y^2 \leq r^2$. Da er grafen til z en kjegle med radius r og høyde r. Betrakt derfor $g(x, y) := \frac{h}{r}$ der $x^2 + y^2 \leq r^2$ som før. Da er grafen til g en kjegle med radius r og høyde h. Volumet *under kjeglen*, som er volumet under grafen til g, er da gitt ved

$$V_0 := \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} g(x, y)\, dA = \frac{h}{r} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dA. \tag{7}$$

Bruk av polarkoordinater gir dermed (nedenfor er r' *ikke* den deriverte til r (hva skulle dette i det hele tatt bety?), men kun en variabel vi bruker i integrasjonen siden r allerede er opptatt med rollen som radius)

$$V_0 = \frac{h}{r} \int_0^{2\pi} \int_0^r r'^2\, dr'\, d\theta = \frac{2\pi h}{r} \int_0^r r'^2\, dr' = \frac{2\pi h}{3} r^2. \tag{8}$$

Volumet av selve kjeglen blir nå volumet av en sylinder med radius r og høyde h, som er $\pi r^2 h$, minus V_0. Altså er volumet vi er på jakt etter gitt ved:

$$V = \pi r^2 h - \frac{2\pi h}{3} r^2 = \frac{\pi h r^2}{3}. \tag{9}$$

Vi kunne også fått dette direkte ved å erstatte g ovenfor med $h - g$.

Areal innesluttet av polarkurver og ellipser

Anta at polarkurven vår er $r = f(\theta)$ med $\theta \in [a, b]$. Da er integrasjonsområdet vårt i polarkoordinater gitt ved $\mathcal{D} : 0 \leq r \leq f(\theta), a \leq \theta \leq b$. Altså er arealet av dette området, som også er arealet innesluttet av polarkurven vår:

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\, dA(r, \theta) = \int_a^b \int_0^{f(\theta)} r\, dr\, d\theta = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{f(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2} \int_a^b f(\theta)^2\, d\theta \tag{10}$$

som er formelen vi kjenner til fra før (uke 2). For arealet innesluttet av ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bruker vi variabelskiftet $u := \frac{x}{a}, v := \frac{y}{b}$. Det gir at ellipsen er $u^2 + v^2 = 1$ som enhetssirkelen i uv-planet. Arealet innesluttet av ellipsen (i xy-planet) er derfor arealet av enhetsdisken i uv-planet. La området innesluttet av ellipsen være E og la enhetsdisken være $\mathbb{D}$. Vi har altså fra variabelskifteformelen:

$$\iint_E dA(x, y) = \iint_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA(u, v). \tag{11}$$

Siden $x = au, y = bv$ er (absoluttverdien av) Jacobideterminanten $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = |ab|$. Vi kan godt for enkelhetsskyld anta at $a, b > 0$. Altså finner vi at

$$\text{Areal}(E) = ab \iint_{\mathbb{D}} dA(u, v) = ab\text{Areal}(\mathbb{D}) = \pi ab. \tag{12}$$