Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 5, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

29. januar 2020

Lineæriseringen til konstante, linære, og affine funksjoner

Merk at vi kan besvare alle punkter (a), (b) og (c) på en gang ved å besvare en variant av (c); nemlig å finne lineæriseringen til $f = f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ der vi tillater at også $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. I det siste tilfelle får vi nemlig (a). Tilfellet (b) er nå tilfellet at $b = 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, og (c) er det generelle tilfellet vi ser på med $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. La oss skrive $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n), \mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$. Vi velger oss et vilkårlig punkt $\mathbf{p}$. Lineæriseringen til f i $\mathbf{p}$ er da definert ved:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{p}}(f)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + b + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b)(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}). \end{aligned} \tag{1}$$

Det er klart at alt vi trenger å gjøre er å finne gradientleddet. merk at hvis vi lar $\mathbf{e}_j := (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ der 1ern er på den $j$te plassen, så kan vi skrive

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p})\mathbf{e}_j = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \right). \tag{2}$$

Med notasjonen dere er vant med fra før av i tilfellet $n = 3$, har vi $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Merk nå at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j. \tag{3}$$

Dermed følger det at

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b)(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b \right)(\mathbf{p})\mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_i x_i + b)(\mathbf{p})\mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_j)(\mathbf{p})\mathbf{e}_j = \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{4}$$

der vi har brukt at $\frac{\partial}{\partial x_j}(a_i x_i + b)$ er lik a_i i det tilfellet $i = j$ og lik 0 ellers (den funksjonen som har den egenskapen betegnes ofte ved δ_{ij} og kalles for *Krönecker delta*). Dermed har vi:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{p}}(f)(\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + b + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b = f(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5}$$

Altså er lineæriseringen til f lik f, uavhengig av punktet $\mathbf{p}$. *Spørsmål: er dette rimelig? Sammenlikn med tilfellet $n = 1$?*

12.5.3

Kjerneregelen gir

$$z_u = g_u = g_x x_u + g_y y_u = g_x h_u. \tag{6}$$

12.6.1

Vi skriver $(3.1, 0.9) = (3, 1) + (0.1, -0.1) := (a, b) + (h, k)$ der $(a, b) := (3, 1)$. Bruk av linearisering gir dermed:

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k. \tag{7}$$

Med $f(x, y) = x^2y^3$ finner vi:

$$f(a, b) = 3^2 = 9 \tag{8}$$

$$f_x = 2xy^3 \tag{9}$$

$$f_x(a, b) = 6 \tag{10}$$

$$f_y = 3x^2y^2 \tag{11}$$

$$f_y(a, b) = 27 \tag{12}$$

og dermed:

$$f(3.1, 0.9) \approx 9 + 6(0.1) + 27(-0.1) = 9 + \frac{6}{10} - \frac{27}{10} = \frac{69}{10} = 6.9. \tag{13}$$

Til sammenlikning, så har vi nøyaktig at $f(3.1, 0.9) = (3.1)^2(0.9)^3 = 7.00569$.

Deriverbarhet til skalarproduktet

La oss starte med deriverbarheten til g uten å måtte vise dette fra definisjonen direkte. Det er klart at:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_j \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_j. \tag{15}$$

Siden disse åpenbart er kontinuerlige, følger det at g er deriverbar; gjenkall teoremet som sier at g er deriverbar hvis og bare hvis den har *kontinuerlige* (og dermed også eksisterende(!)) førsteordens partielle deriverte. Vi går så videre med å vise, nå direkte fra definisjonen, at f er deriverbar. Vi har:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2. \tag{16}$$

Dermed (med notasjonen som i oppgaven om lineærisering for affine funksjoner øverst),

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i^2) \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} 2x_i \delta_{ij} \mathbf{e}_j = 2 \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j = 2\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{17}$$

På dette tidspunktet er det illustrativt å sammenlikne med tilfellet $n = 1$. Lineæriseringen til f i et punkt $\mathbf{p}$ blir dermed:

$$L_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + 2\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}). \tag{18}$$

Per definisjon har vi at f er deriverbar i $\mathbf{p}$ hvis og bare hvis:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{|f(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|} = 0. \tag{19}$$

Hvis dette ser litt uvant ut, merk at om vi definerer $\mathbf{h} := \mathbf{x} - \mathbf{p}$, så er dette nøyaktig det samme som:

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - L_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p} + \mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0. \tag{20}$$

Vi skal vise at vi har (19). Vi finner:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - 2\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \\ &= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{p}|^2 - 2\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{p}|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \\ &= |\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2, \end{aligned} \tag{21}$$

der siste likhet følger fra at vi generelt har for en vektor $\mathbf{A}$: $|\mathbf{A}|^2 = f(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. Men dermed har vi

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{|f(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}|} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} |\mathbf{x} - \mathbf{p}| = 0 \tag{22}$$

der siste likhet er åpenbar. Altså har vi at (19) er sann.

12.7.17

La v være retningen. Vi skriver $v := (a, b)$ med $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Den retningsderiverte i punktet p til f i retningen v er $D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v$. Siden $\nabla f(x, y) = (y, x)$ finner vi for $p = (2, 0)$ at

$$D_v f(p) = 2b \tag{23}$$

og skal dette være -1 finner vi at $b = -\frac{1}{2}$. Dermed må vi ha $a^2 = 1 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ som gir $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Hvis vi istedenfor -1 skal ha -3 finner vi $2b = -3$ eller $b = -\frac{3}{2}$. Det gir så $a^2 = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$ som er umulig. Altså kan ikke den retningsderiverte være lik -3. Hvis vi skal ha at den retningsderiverte er lik -2 finner vi at $b = -1$. Det gir at $a = 0$. Altså har vi:

- $D_v f(p) = -1$ for $v = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,
- $D_v f(p) = -2$ for $v = (0, -1)$.

$\boxed{12.7.31}$

Fiks et punkt (a, b) i disken. Det holder å vise at $f(a,b) = f(0,0)$. La $c(t) := (x(t), y(t))$ være en glatt parametrisert kurve i disken slik at $c(0) = (x(0), y(0)) = (0,0), c(1) = (x(1), y(1)) = (a, b)$. Foreksempel kan vi la $c(t) = t(a,b)$. La $g(t) = f(c(t))$. Ved kjerne-regelen følger det at $g'(t) = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$. Integrasjon og bruk av fundamentalteoremet gir dermed $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\ dt = \int_0^1 \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)\ dt = 0$ siden vi per antakelse har at $\nabla f(c(t)) = 0$ for alle $t \in [0,1]$. Men det betyr at $g(1) = g(0)$. Siden $g(1) = f(c(1)) = f(a,b)$ og $g(0) = f(c(0)) = f(0,0)$ følger det at $f(a,b) = f(0,0)$ som ønsket.

Bemerkning: merk at det ikke er noe spesielt med disken. Det samme argumentet hadde gitt samme konklusjon (at f er konstant) så lenge området er slik at alle to punkter kan forbindes ved hjelp av en (stykkevis) glatt kurve.

$\boxed{12.8.1}$

Vi deriverer den oppgitte likningen med hensyn på y. Det gir

$$\frac{\partial x}{\partial y} y^3 + 3xy^2 + 4x^3 \frac{\partial x}{\partial y} y + x^4 = 0. \tag{24}$$

Dermed:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{x^4 + 3xy^2}{y^3 + 4x^3 y} \tag{25}$$

der dette holder så lenge nevneren ikke er 0.

Eksamen våren 1999, oppgave 3 a utbyttet versjon

Vi har flatene $z = 4x^2 + y^2$ og $z = 4 - 3y^2$. Når disse skjærer hverandre må nødvendigvis z-uttrykkene være like. Det gir projeksjonen i xy-planet gitt ved

$$4x^2 + y^2 = 4 - 3y^2 \tag{26}$$

som gir oss enhetssirkelen

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{27}$$

En standard parametrisering for denne er $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Vi kan velge hvilken som helst av uttrykkene for z ovenfor og få $z(t)$, parametriseringen for z-komponenten til skjæringskurven vår. Foreksempel $z = 4 - 3y^2$. Dermed $z(t) = 4 - 3\sin^2 t$. Altså er en parametrisering for skjæringskurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 4 - 3\sin^2), \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{28}$$