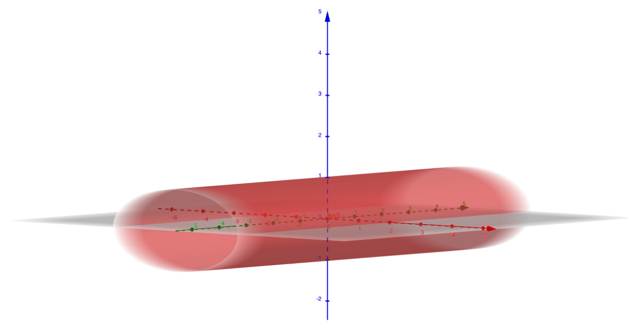
Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 4, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

22. januar 2020

10.5.10

Siden y ikke dukker opp, er det ingen begrensninger på y. I xz-planet vet vi at vi har en ellipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + z^2 = 1$. Den totale flaten er derfor en uendelig lang elliptisk sylinder som strekker seg i y-retning.



12.3.6

Vi deriverer og finner

$$w_x(x, y, z) = \frac{e^{xyz} yz}{1 + e^{xyz}} \tag{1}$$

og pågrunn av symmetrien, har vi w_y, w_z det samme, men med x erstattet med henholdsvis y og z:

$$w_y(x, y, z) = \frac{e^{xyz} zx}{1 + e^{xyz}} \tag{2}$$

$$w_z(x, y, z) = \frac{e^{xyz} yx}{1 + e^{xyz}}. \tag{3}$$

Evaluering i punktet $p := (2, 0, -1)$ gir dermed:

$$w_x(p) = 0 \tag{4}$$

$$w_y(p) = -2 \tag{5}$$

$$w_z(p) = 0. \tag{6}$$

$\boxed{12.3.8}$

Derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \tag{7}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}. \tag{8}$$

Evaluering i punktet $p := (-3,4)$ gir dermed:

$$f_x(p) = \frac{3}{\sqrt{9+16}^3} = \frac{3}{5^3} \tag{9}$$
$$f_y(p) = -\frac{4}{5^3}. \tag{10}$$

$\boxed{12.4.1}$

Derivasjon gir:

$$z_x(x,y) = 2x(1+y^2) \tag{11}$$
$$z_{xx}(x,y) = 2(1+y^2) \tag{12}$$
$$z_y(x,y) = 2yx^2 \tag{13}$$
$$z_{yy}(x,y) = 2x^2 \tag{14}$$
$$z_{xy}(x,y) = z_{yx} = 4xy. \tag{15}$$

$\boxed{12.4.11}$

Vi deriverer og finner

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \tag{16}$$
$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \tag{17}$$

og på grunn av symmetri, finner vi $f_{yy}(x,y) = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; det vil si det samme men med x byttet ut med y. Disse holder selvfølgelig kun vekk fra origo. Addisjon gir dermed

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \neq (0,0) \tag{18}$$

som viser utsagnet (se boka for definisjon av harmoniske funksjoner eller gjenkall plenumsregningen).