Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 2, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

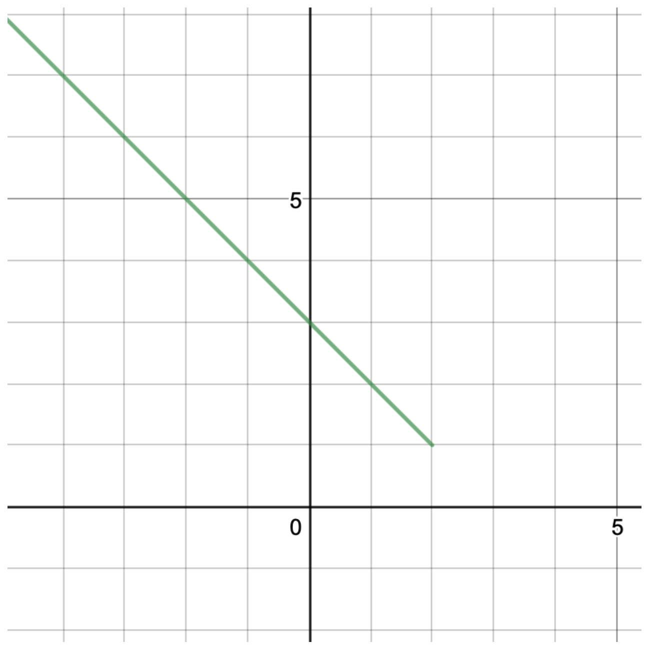
8. januar 2020

8.2.2

Vi har $x = x(t) = 2 - t, y = y(t) = t + 1$ med $0 \leq t < \infty$. Dermed om vi legger sammen:

$$x + y = 3. \tag{1}$$

Dette er en rett linje. Siden orienteringen er positiv ved økende parameter, ser vi at x minker i positiv retning (altså er orienteringen mot venstre). Merk at den parametriserte kurven ligger på linjen, men ikke utgjør hele. Den største verdien x kan ha er nemlig gitt ved $t = 0$ som gir $x = 2$.

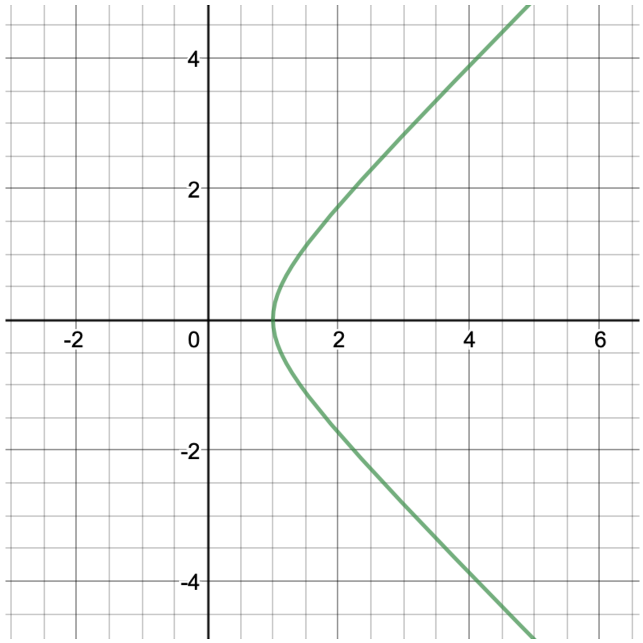


8.2.11

Vi bruker at $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ for alle t. Siden $x = x(t) = \cosh(t), y = y(t) = \sinh(t)$ følger det at vi får hyperbelen

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{2}$$

Merk midlertidig at $\cosh(t) \geq 0$ for alle t slik at $x \geq 0$. Vi får altså kun den *ene delen* av hyperbelen ovenfor (høyre del).



8.3.11

Vi har at $x'(t) = -2\sin(2t) \neq 0$ når $t = \frac{\pi}{6}$. Kjerneregelen gir nå

$$y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) \tag{3}$$

og dermed stigningstallet til (tangenten til) kurven i $t = \pi/6$:

$$y'(x(t))|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{y'(\pi/6)}{x'(\pi/6)} = \frac{\cos(t)}{-2\sin(2t)}|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

8.3.18

Vi har at $x(t) = (t-1)^4, y(t) = (t-1)^3$ og dermed $x^3 = y^4$. Det gir $x = x(y) = y^{4/3}$. Dermed $x'(y) = \frac{4}{3}y^{1/3}$. Denne er kontinuerlig for alle y, så kurven er glatt.

8.4.1

Vi bruker formelen for buelengden. La

$$\mathbf{r}(t) := (x(t), y(t)) = (3t^2, 2t^3), \qquad t \in [0,1]. \tag{5}$$

Vi deriverer og finner

$$\mathbf{r}'(t) := \mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (6t, 6t^2) \tag{6}$$

og dermed

$$v(t) := |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{6^2(t^2+t^4)} = 6t\sqrt{1+t^2} \tag{7}$$

der siste likhet kommer av at $\sqrt{t^2} = |t| = t$ siden $t \geq 0$. Buelengden til kurven vår blir dermed (vi bruker L til å betegne hele buelengden)

$$s(1) := L = \int_0^1 v(t)\, dt = 6\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\, dt = 3\int_1^2 \sqrt{u}\, du = 4\sqrt{2} - 2, \tag{8}$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 1 + t^2$, og der vi minner om formelen for buelengden over intervallet $[a, t]$ (buelengdefunksjonen som en funksjon av t) for kurven gitt av $\mathbf{r}(t)$ for $t \in [a, b]$ si (her har vi $a = 0, b = 1$):

$$s(t) = \int_a^t v(x)\, dx. \tag{9}$$

$\boxed{8.4.3}$

Fremgangsmåten er tilsvarende forrige oppgave. Vi finner med tilsvarende notasjon:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= (x'(t), y'(t)) = (3a\cos^2(t)(-\sin(t)), 3a\sin^2(t)(\cos(t))) \\ &= 3a(-\sin(t)\cos^2(t), \cos(t)\sin^2(t))\end{aligned} \tag{10}$$

og dermed

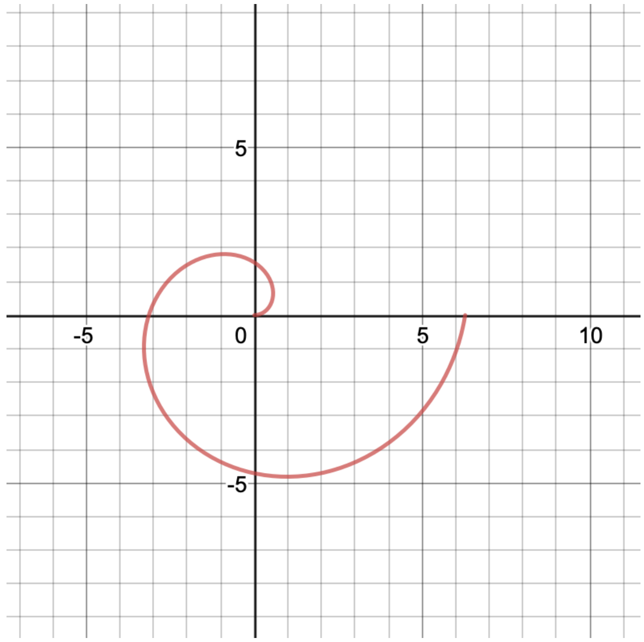
$$\begin{aligned}v(t) &= |\mathbf{v}(t)| \\ &= 3|a|\sqrt{\sin^2(t)\cos^4(t) + \cos^2(t)\sin^4(t)} \\ &= 3|a|\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} \\ &= 3|a|\sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)} \\ &= 3|a|\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2} \\ &= \frac{3}{2}|a| \cdot |\sin(2t)|.\end{aligned} \tag{11}$$

Pågrunn av absoluttverdien, må vi splitte opp integralet når vi tilslutt skal regne ut buelengden. Vi finner (der L er den totale buelengden vi er på jakt etter)

$$\begin{aligned}\frac{2L}{3|a|} &= \int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2t) + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin(2t))\, dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin(2t)\, dt + \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\sin(2t))\, dt \\ &= 2\left(\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin(2t))\, dt\right) \\ &= \left(-\cos(2t)|_0^{\pi/2} + \left(\cos(2t)|_{\pi/2}^{\pi}\right)\right) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4\end{aligned} \tag{12}$$

som dermed gir

$$L = 6|a|. \tag{13}$$



8.6.2

Siden $r = \theta$ og θ øker fra 0 til 2π er spiralen (se figuren ovenfor) orientert mot klokken og utover fra origo med økende avstand fra origo i det vi beveger oss rundt.

Arealet innesluttet av kurven finner vi direkte ved arealformelen:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2 \, d\theta = \frac{4\pi^3}{3}. \tag{14}$$

8.6.14

Vi bruker buelengdeformelen for en polarkurve og finner (vi bruker igjen L til å betegne buelengden som i tidligere oppgaver ovenfor)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{d\theta}(a\theta)\right)^2 + (a\theta)^2} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} \, d\theta \\ &= |a| \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} \, d\theta. \end{aligned} \tag{15}$$

Vi bruker nå substitusjon for å regne ut det siste integralet. Vi husker (kanskje?) at hvis vi hadde hatt integranden $1 - x^2$, så kunne det være lurt med substitusjonen $x := \sin(u)$ slik at $1 - x^2 = 1 - \sin^2(u) = \cos^2 u$. Vår situasjon nå er ganske lik, men vi har $1 + x^2$ istedenfor $1 - x^2$ (vel, vi har $x = \theta$, men det spiller naturligvis ingen rolle). Poenget er at $1 - x^2$ blir til noe fint. Tenker vi over det, kommer dette av at $1 - \sin^2(u) = \cos^2(u)$ eller med andre ord at $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$. Har vi en liknende identitet (for noen funksjoner) men med minus istedenfor pluss? Ja det har vi, for vi har nemlig

$$\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1 \tag{16}$$

for alle u. Det betyr at $\cosh^2(u) = 1+\sinh^2(u)$. Altså prøver vi på substitusjonen $x = \sinh(u)$ som gir $\frac{dx}{du} = \cosh(u)$. Altså finner vi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+x^2}\, dx = \int_0^b \cosh^2(u)\, du, \tag{17}$$

der b er slik at $\sinh(b) = 2\pi$. Bruker vi definisjonen til $\cosh(u) = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$ kan vi uten særlig store vansker regne ut integralet ovenfor. Vi ender opp med

$$\begin{aligned}\int_0^b \cosh^2(u)\, du &= \frac{1}{2}\left[(u + (\sinh u)(\cosh u)\right]_0^b \\ &= \frac{1}{2}\left(b + \sinh(b)\sqrt{1+\sinh^2(b)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(b + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Det gjenstår nå kun å finne eksplisitt hva b er. Vi har

$$\frac{e^b - e^{-b}}{2} = 2\pi. \tag{19}$$

Det vil si

$$e^b - e^{-b} = 4\pi. \tag{20}$$

La oss gange alt med e^b. Det gir oss

$$e^{2b} - 1 = 4\pi e^b \tag{21}$$

eller om vi skriver om:

$$x^2 - 4\pi x - 1 = 0 \tag{22}$$

der vi også har satt $x := e^b$. Vi kan finne x; foreksempel ved hjelp av annengradsformelen:

$$x = \frac{4\pi \pm \sqrt{16\pi^2 + 4}}{2} \tag{23}$$

og siden $e^b = x$, må vi ha $x \geq 0$. Altså velger vi ovenfor plusstegnet og finner løsningen $x = \frac{4\pi + 2\sqrt{4\pi^2+1}}{2} = 2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}$. Dermed tilslutt: $b = \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right)$. Altså har vi helt tilslutt at buelengden vi var på jakt etter er gitt ved

$$L = |a|\frac{1}{2}\left(\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right). \tag{24}$$

8.5.30

Vi rakk ikke hele denne oppgaven i plenumsregningen, men jeg fikk inntrykk av at folk ønsket fullstendig løsning, så her kommer et løsningsforslag til oppgaven.:

Vi ser på $r = \cos(n\theta)$. Vi skal skille mellom (og dette er riktignok lurt) odde og like n. La oss starte med odde n. Det er nok lurt å starte med et enkelt spesialtilfelle først for å se hva som foregår. For $n = 1$ har vi rett og slett $r = \cos(\theta)$. I plenumsregning viste vi at dette er en sirkel (med sentrum i 1/2 og radius 1/2). Altså er antall blader lik 1 (som vi observerer i samme slengen er lik n). For å forstå litt mer hva som foregår, ser vi på $y = \cos(x)$ i xy-planet. Vi bruker samme ordleggingen som i plenumsregningen (se også figurene nedenfor). Vi observerer at det er to halve topper i $x = 0$ og $x = 2\pi$, og en bunn i $x = \pi$. Den høyre delen av toppen i $x = 0$ og venstre delen av toppen i $x = 2\pi$ sammenfaller og danner kronbladet (som er hele disken; dvs. innsiden av sirkelen); og hver av delene er halvparten av kronbladet (som er halve disken). Hva så med bunnen? burde ikke den også bidra med et helt kronblad? Husk at y egentlig representerer r, mens x representerer θ. I $x = \pi$; og hele fjellbunnen som følger med, er r negativ. Vi må huske at konvensjonen da er å flippe fjellbunnen til en fjelltopp (endre fortegnet til r fra negativt til positivt) og forskyve x med π; altså at $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$ i polarkoordinater. Vi ser at om vi forskyver denne fjellbunnen ved å legge til π i bunnen $x = \pi$ så ender vi opp i $x = 2\pi$ som er en topp. Bunnen forsvinner altså inn i toppen og dermed tas den ikke med. Hva med tilfellet $n = 2$? Igjen har vi topper for $2x = 2\pi k, k = 0, 1, \ldots$ som gir $x = 0, \pi$ i intervallet $[0, 2\pi]$. Vi har bunner for når $2x = \pi(1 + 2k), k = 0, 1, \ldots$. Det vil si når $x = \frac{1+2k}{2}\pi, k = 0, 1, \ldots$. I intervallet $[0, 2\pi]$ finner vi $k = 0, 1$, som gir $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Vi ser nå at om vi forskyver $x = \frac{\pi}{2}$ med π så ender vi opp på den andre bunnen. Tilsvarende, om vi forskyver den andre bunnen, så ender vi opp på $2\pi + \frac{\pi}{2}$ som er den første bunnen (modulo 2π). Altså blir bunnene telt med denne gangen slik at vi tilsammen har 4 fjelltopper; to fjellbunner som blir til to fjelltopper, en fjelltopp, og to halve fjelltopper ($x = 0, x = 2\pi$). Se også figuren nedenfor. Altså er antall blader tilsammen 4; som vi forøvrig merker oss er $2n$.

Det virker som at antall blader i $\cos(n\theta)$ er n for n odde; siden bunner blir forskjøvet til topper, og $2n$ i det tilfellet n er like; siden bunner blir forskjøvet til bunner (og blir til topper etter at vi har flippet dem). Vi må nå vise dette. La oss først ta for oss tilfellet n er odde. Da kan vi skrive $n = 2m - 1, m = 1, 2, 3, \ldots$. Topper finner vi for

$$(2m - 1)x_{t,k} = 2\pi k \tag{25}$$

der $k = 0, 1, 2, \ldots$. Det gir $x_{t,k} = \frac{2k}{2m-1}\pi, k = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 2$. Det vil si $2m - 1 = n$ distinkte topper. Hvis vi kan vise at bunnene forskyves til toppene er vi ferdige og antalle blader må være lik n; som før sammenfaller toppen $x_{t,0} = 0$ og $x_{t,2m-1} = 2\pi$ sammen og lager ét kronblad (én fjelltopp). Bunnene er gitt ved

$$(2m - 1)x_{b,l} = \pi + 2\pi l \tag{26}$$

der $l = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 2$ gir de distinkte bunnene. Det gir $x_{b,l} = \frac{2l+1}{2m-1}\pi$. Forskyvningen blir dermed

$$x_{b,l} + \pi = \frac{2l + 1 + 2m - 1}{2m - 1}\pi = \frac{2(l + m)}{2m - 1}\pi = x_{t,k} \tag{27}$$

der $k = l + m$. Altså er riktignok forskyvningen av $x_{b,l}$ en topp. Siden alle $x_{b,l}$ er distinkte (for $l = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 2$) viser dette at forskyvningene gir distinkte topper; og dermed alle toppene. Dette tar hånd om tilfellet n er odde. La oss se på tilfellet n er like. Da kan vi skrive $n = 2m, m = 1, 2, 3, \ldots$. Vi finner topper ved

$$2mx_{t,k} = 2\pi k \tag{28}$$

som gir $x_{t,k} = \pi\frac{k}{m}, k = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 1$. Videre finner vi bunner gitt ved

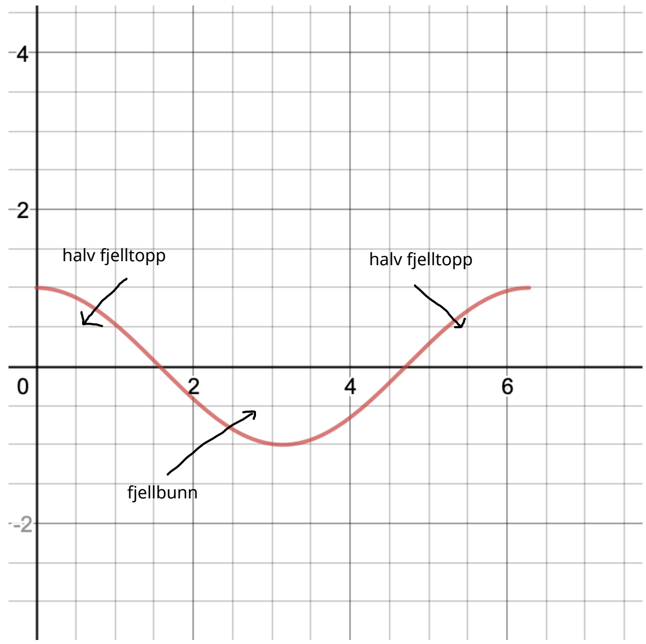
$$2mx_{b,l} = \pi + 2\pi l \tag{29}$$

som gir $x_{b,l} = \frac{1+2l}{2m}\pi, l = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 1$. Forskyvningen bli dermed

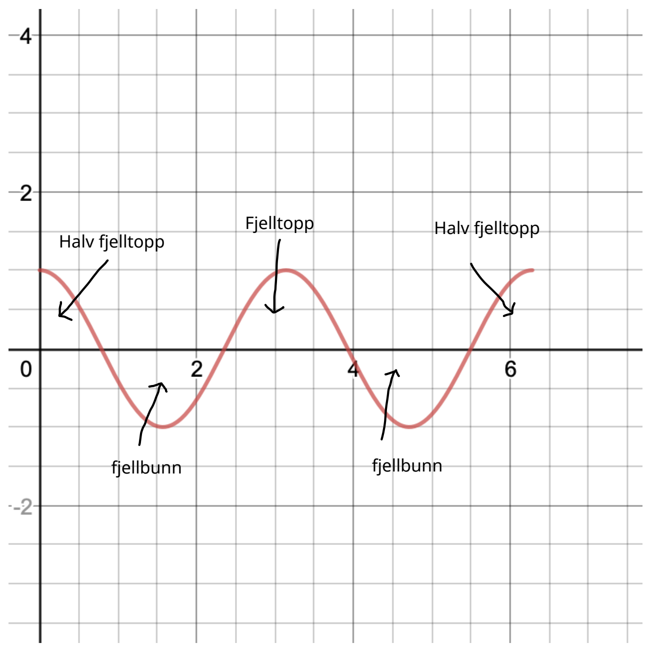
$$x_{b,l} + \pi = \frac{1 + 2l + 2m}{2m}\pi = \frac{1 + 2(l + m)}{2m}\pi = x_{b,l+m}. \tag{30}$$

Dette viser at bunnene blir forskjøvet til bunnene, og tar dermed også hånd om tilfellet n er like. Vi har vist:

Proposisjon 1. *Antall kronblader til $r = \cos(n\theta)$ er n hvis n er odde og $2n$ hvis n er like.*



Figuren illustrer tilfellet $n = 1$ og grafen til $y = \cos(x), x \in [0, 2\pi]$ med antydede fjelltopper og fjellbunner.

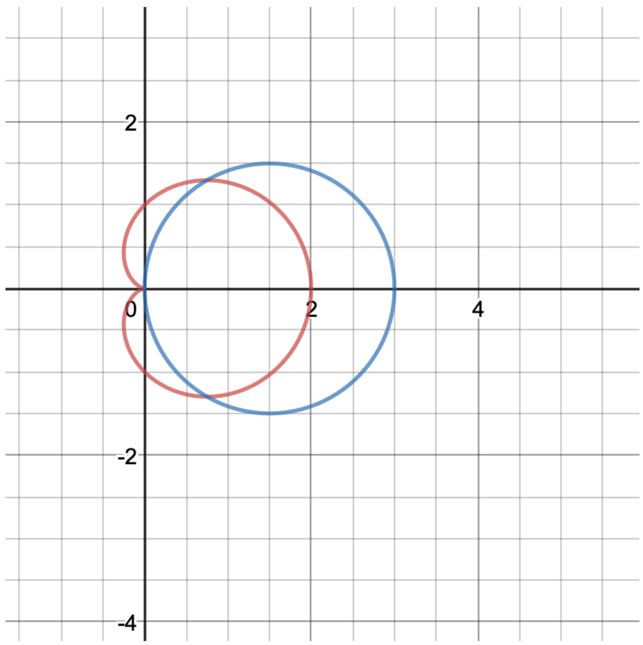


Figuren illustrer tilfellet $n = 2$ og grafen til $y = \cos(x), x \in [0, 2\pi]$ med antydede fjelltopper og fjellbunner.

$\boxed{8.6.9}$

Denne oppgaven rakk vi ikke å komme til i plenumsregning, så løsningsforslag kommer her.

Det er lurt med en rask skisse. Den letteste kurven av de to må være sirkelen $r = 3\cos\theta$. Vi ganger med r og finner $r^2 = 3r\cos\theta$ som blir til $x^2 + y^2 = 3x$ eller $x^2 - 3x + y^2 = 0$, eller $(x - 3/2)^2 + y^2 = (3/2)^2$. Altså vet vi hvordan sirkelen ser ut: den har senter i $(3/2, 0)$ og radius $3/2$. Videre betrakter vi kardioden $r = 1 + \cos\theta$. En kardiode er en slags hjerteform. Når $\theta = 0$ har vi at $r = 2$. Når θ så øker, synker $\cos\theta$ slik at vi går mot $r = 1$, og i $\theta = \frac{\pi}{2}$ er vi nøyaktig i $r = 1$. Når θ så går fra $\pi/2$ til π, synker $\cos\theta$ slik at r går fra $r = 1$ til $r = 0$ med $r = 0$ i $\theta = \pi$. Mellom $\theta = \pi$ og $\theta = 2\pi$ har vi igjen samme oppførsel. Vi ender opp med noe liknende figuren nedenfor:



Vi er på jakt etter arealet som ligger innenfor kardioden men utenfor sirkelen. Vi finner skjæringsvinklene mellom de to kurvene ved å løse likningen:

$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta \tag{31}$$

som gir $\cos\theta = 1/2$ eller $\theta = \frac{\pi}{3}$ og $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Vi finner først arealet innenfor kardioden. Arealformelen gir med en gang:

$$A_k = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{5\pi/3} (1 + \cos(\theta))^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}\right). \tag{32}$$

Så finner vi arealet innenfor sirkelen vi vil trekke vekk fra dette. Vi må være litt forsiktig siden r kan være negativ for visse verdier av θ i intervallet $[\pi/3, 5\pi/3]$. Vi bør forholde oss til positive r. Vi kan da innse at arealet vi er på jakt etter inne i sirkelen er 2 ganger (siden alt er symmetrisk) arealet av det inne i sirkelen vi vil trekke vekk som befinner seg *over* x-aksen. Det gir dermed arealet inne i sirkelen vi vil trekke vekk fra A_k:

$$A_s = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3\cos(\theta)) \, d\theta = \frac{3}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right). \tag{33}$$

Det ønskede arealet er forskjellen mellom disse to og altså da

$$A = A_k - A_s = \pi - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{3}{4}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{4}\pi. \tag{34}$$