Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 13, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

19. mars 2020

Fluks til konstant vektorfelt

Hvis vektorfeltet er konstant er naturligvis divergensen 0, så utsagnet er en direkte konsekvens av divergensteoremet.

16.4.1

Vi bruker divergensteoremet. Vi har $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1 - 2 + 4 = 3$ slik at fluksen er 3 ganger volumet til kula: $4\pi a^3$.

16.4.20

Siden divergensen til integrandvektorfeltet vårt er 3, følger det fra divergensteoremet at fluksen (som er integralet på høyresiden uten konstanten 1/3 foran) er lik 3 ganger volumet. Altså er volumet 1/3 av fluksen. Det er nøyaktig det vi skulle vise.

Ekstra spørsmålet: vi kunne erstattet integrandvektorfeltet med et hvilken som helst annet vektorfelt med divergens lik en eller annen konstant $c \neq 0$. Hvis $\mathbf{F}$ er et slikt vektorfelt med $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = c \neq 0$, følger det dermed at

$$\frac{1}{c} \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = V. \tag{1}$$

16.4.27

La $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Vi har fra formelen til den retningsderiverte at $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{N}}$. Siden $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi$ følger derfor formelen direkte fra divergensteoremet.

16.4.28

La $\mathbf{F} = \phi\nabla\psi$. Det følger fra formelen til den retningsderiverte at $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \phi\nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{N}} = \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}$. Videre følger det fra produktregelen at $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \phi\Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi$. Altså gir divergensteoremet at:

$$\iint_D \phi\Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dV = \oiint_{\mathbb{S}} \phi \frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS. \tag{2}$$

Vi erstatter nå ϕ med ψ og får

$$\iint_D \psi\Delta\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, dV = \oiint_{\mathbb{S}} \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \, dS. \tag{3}$$

Subtraksjon gir dermed den ønskede formelen.

16.4.29

Med $\mathbf{F} = \phi\mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er en konstant vektor, følger det at $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \nabla\phi \cdot \mathbf{c}$. Dermed gir divergensteormet:

$$\iiint_D \nabla\phi \cdot \mathbf{c} \, dV = \oiint_{\mathbb{S}} \phi\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS. \tag{4}$$

La oss skrive $\hat{\mathbf{N}} := (N_1, N_2, N_3)$. Velger vi nå $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$, finner vi:

$$\iiint_D \phi_x \, dV = \oiint_{\mathbb{S}} \phi N_1 \, dS. \tag{5}$$

Velger vi $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ finner vi:

$$\iiint_D \phi_y \, dV = \oiint_{\mathbb{S}} \phi N_2 \, dS. \tag{6}$$

og velger vi tilslutt $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ finner vi:

$$\iiint_D \phi_z \, dV = \oiint_{\mathbb{S}} \phi N_3 \, dS. \tag{7}$$

Disse tre identitetene gir det ønskede resultatet: gang den første med vektoren $(1, 0, 0)$, den andre med vektoren $(0, 1, 0)$, og den siste med vektoren $(0, 0, 1)$ og legg sammen resultatene.