Løsningsforslag til plenumsoppgaver uke 12, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

18. mars 2020

Det ble dessverre litt rot med plassering av meg seg i forhold til kameraet under dagens plenum (beklager fra meg!), så her kommer et lite løsningsforslag til oppgavene vi gjennomgikk (ikke eksamensoppgaven).

Divergensteorem i planet

La $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ og la $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [a, b]$ være en parametrisering til $\mathcal{C} = \partial R$. Da har vi:

- $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$.
- $\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{v(t)}\mathbf{v}(t) = \frac{1}{v}(x'(t), y'(t))$ der $v(t) = v = |\mathbf{v}|$.
- $\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{v}(y'(t), -x'(t))$.
- $s(t) = \int_a^t v(u)\, du, s'(t) = \frac{ds}{dt} = v(t) := v$, og dermed $ds = v\ dt$.

Følgelig:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ ds &= \int_a^b (F_1, F_2) \cdot \frac{1}{v}(y'(t), -x'(t))v\ dt \\
&= \int_a^b F_1 y'(t)\ dt - F_2 x'(t)\ dt \\
&= \oint_{\mathcal{C}} F_1\ dy - F_2\ dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\frac{dx}{dt} = x'(t) \implies dx = x'(t)\ dt$, $\frac{dy}{dt} = y'(t) \implies dy = y'(t)\ dt$. La $P := -F_2, Q := F_1$. Da er integralet ovenfor ved hjelp av Green's teorem:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ ds = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dA \\
&= \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\ dA \\
&= \iint_R \operatorname{div}(\mathbf{F})\ dA \qquad (2)
\end{aligned}$$

som var det vi ville vise.

Oppgave 16.3.1

La $\mathbf{F} := (\sin x + 3y^2, 2x - e^{-y^2}) := (P, Q)$. Da er linjeintegralet vi ønsker gitt ved hjelp av Green's teorem som:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathbb{D}_a^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA \\
&= \iint_{\mathbb{D}_a^+} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(2x - e^{-y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin x + 3y^2 \right) \right) \, dA \\
&= \iint_{\mathbb{D}_a^+} 2 - 6y \, dA \\
&= 2 \iint_{\mathbb{D}_a^+} \, dA - 6 \iint_{\mathbb{D}_a^+} y \, dA \\
&= 2\text{Areal}(\mathbb{D}_a^+) - 6 \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \\
&= \pi a^2 - 4a^3 = a^2(\pi - 4a) \qquad (3)
\end{aligned}$$

der $\mathbb{D}_a^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$ er halvdisken og der vi antar for enkelhetsskyld at $a > 0$.

Oppgave 16.3.5

Betrakt Green's teorem:

$$\oint_{\partial R} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA = \iint_A \text{curl}((P, Q)) \cdot \mathbf{k} \, dA.$$

(a) Hvis vi velger $Q = x, P = 0$ får vi:

$$\oint_{\partial R} x \, dy = \iint_A \, dA = \text{Areal}(R). \qquad (4)$$

(b) Hvis vi velger $Q = 0, P = -y$ får vi

$$-\oint_{\partial R} y \, dx = \iint_R \, dA = \text{Areal}(R). \qquad (5)$$

(c) Hvis vi velger $Q = \frac{1}{2}x, P = -\frac{1}{2}y$, får vi:

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial R} x \, dy - y \, dx = \iint_R \, dA = \text{Areal}(R). \qquad (6)$$

Ovenfor har vi antatt at ∂R er positivt orientert i forhold til R (mot klokka), og P, Q er naturligvis første ordens differensierbare i $\bar{R} = R \cup \partial R$ (så ikke bare R men også randen til R). I vårt tilfelle har vi fått oppgitt at $\partial R = \mathcal{C}$ har parametrisering $\mathbf{r}(t) = (a\cos^3 t, b\sin^3 t), t \in [0, 2\pi]$. Denne er lukket, men orienteringen er avhengig av fortegnet til a og b. Siden vi ikke vet fortegnet til a og b nedenfor, har vi $\pm$Areal(R); positiv eller nehgativ orientering endrer bare identiteten i Green's teorem med et fortegn. La oss bruke (a) og (b) på vår $\mathbf{r}$ for å finne arealet av R (området omsluttet av $\mathbf{r}$).

(a) Da har vi:

$$\pm\text{Areal}(R) = \oint_{\mathcal{C}} x \, dy \tag{7}$$

der vi ikke vet orienteringen til $\mathcal{C}$ i integralet vårt (den kan være positiv (da har vi pluss) eller negativ (da har vi minus)). Vi finner fra $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ at $x(t) = a\cos^3 t$ og at $y'(t) = 3b\sin^2 t \cos t$. Dermed med $dy = y'(t)\ dt$, finner vi altså at:

$$\pm\text{Areal}(R) = 3ab \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \ dt = \frac{3ab\pi}{8}. \tag{8}$$

(b) Tilsvarende som i (a), men nå har vi:

$$\pm\text{Areal}(R) = -\oint_{\mathcal{C}} y \, dx \tag{9}$$

og $dx = x'(t)dt = 3a\cos^2 t(-\sin t)$ slik at vi får:

$$\pm\text{Areal}(R) = 3ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^4 t \ dt = \frac{3ab\pi}{8}. \tag{10}$$

som før.

Uansett hva orienteringen er, finner vi derfor at arealet til området vårt er:

$$\text{Areal}(R) = \frac{3\pi}{8}|ab|. \tag{11}$$