

Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 12, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

16. mars 2020

To viktige identiteter

La oss starte med foreksempel $\operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) = 0$. La $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ være vektorfeltet vårt, et vilkålig glatt vektorfelt i rommet. La $\mathbf{G} := \operatorname{Curl}(\mathbf{F}) := (G_1, G_2, G_3)$. En nyttig måte å få fatt i \mathbf{G} på er å huske én av komponentene, si G_1 , gitt ved

$$G_1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad (1)$$

også merke at de resterende komponentene kan fåes ved å permutere indekser syklisk. Det dette betyr er at $(x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x)$ også videre, og tilsvarende $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$ også videre. Dermed finner vi G_2 , neste komponent, ved å syklisk permutere indekser én gang:

$$G_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad (2)$$

og tilslutt G_3 ved å syklisk permutere indekser nok en gang:

$$G_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \quad (3)$$

Herifra finner vi divergensen til \mathbf{G} direkte:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{G}) &= \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

der vi har brukt at de blandede partielle deriverte er like; det er blant annet her glattheten til \mathbf{F} kommer inn i bildet (**merk:** det holder at \mathbf{F} er annenorden differensierbar). Siden \mathbf{F} var et vilkårlig (men glatt) vektorfelt, følger det at vi har identiteten $\operatorname{div}(\operatorname{curl}) = 0$.

Det neste blir nå å vise identiteten $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) = 0$ der f er et vilkårlig, men glatt, skalarfelt. Da har vi naturligvis $\operatorname{grad}(f) = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. La $\mathbf{F} := \operatorname{grad}(f) := (F_1, F_2, F_3)$ og la $\mathbf{G} = \operatorname{curl}(\mathbf{F}) := (G_1, G_2, G_3)$. Vi har lyst å vise at $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$. Vi kan bruke uttrykkene for G_1, G_2, G_3 ovenfor. Da finner vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned} \tag{5}$$

som var det vi ville vise, der siste likhet følger igjen av at blandede partielle deriverte er like (som in sin tur følger fra glattheten til f ; igjen: det holder at f er differensierbar av annen orden). Siden f var vilkårlig, følger det at vi har identiteten vi ville vise.

16.1.3

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(y, z, x) = 0 \tag{6}$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \operatorname{curl}(y, z, x) = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = -(1, 1, 1). \tag{7}$$

16.1.9

En kan bruke kjerneregler, men en kan også bare skrive alt om til kartesiske koordinater også overtsette tilbake til polarkoordinater etter å ha regnet ut divergensen og curlen i kartesiske koordinater på vanlig måte. Vi finner:

$$\mathbf{F} = (r, \sin \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \tag{8}$$

Dermed følger det at:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \\
&= \frac{x(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \\
&= \frac{x(x^2 + y^2) + x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \\
&= \frac{r \cos \theta (r^2) + r^2 \cos^2 \theta}{r^3} = \frac{\cos \theta (r + \cos \theta)}{r} \tag{9}
\end{aligned}$$

$\operatorname{curl}(\mathbf{F})$ kan finnes på tilsvarende måte. La oss skrive $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$. Da har vi:

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \mathbf{k} \\
&= \left(-\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{k} \\
&= \left(\frac{-xy - y(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) \mathbf{k} \\
&= \left(\frac{-r^2 \cos \theta \sin \theta - r \sin \theta (r^2)}{r^3} \right) \mathbf{k} \\
&= -\sin \theta \frac{\cos \theta + r}{r} \mathbf{k}. \tag{10}
\end{aligned}$$

16.1.13

Fra divergensteoremet i planet (se første oppgaven i plenumsregningen: egentlig bare Green's teorem) har vi:

$$\oint_{\mathbf{c}_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, ds = \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dA \tag{11}$$

der \mathbb{D}_ε er disken med sentrum i origo og radius $\varepsilon > 0$. La oss skrive $\psi := \operatorname{div}(\mathbf{F})$. Da vet vi at ψ er glatt, spesielt er den kontinuertlig. Det siste integralet blir nå $\iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi \, dA$. Siden ψ er kontinuertlig følger det at $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} dA} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi \, dA = \psi(0, 0)$ som gir oss det vi ønsket å vise (merk at $\iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} dA = \pi \varepsilon^2 = \operatorname{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)$).

Kommentar: jeg anbefaler dere til å tenke godt gjennom hvorfor den siste grenseverdien er sann. Her er et tips: det holder å vise at

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi \, dA - \psi(0, 0) = 0. \quad (12)$$

Merk nå at siden $\psi(0, 0)$ er et tall, så kan vi skrive $\psi(0, 0) = \frac{1}{\text{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \psi(0, 0) \, dA$. Altså holder det nå å vise at

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Areal}(\mathbb{D}_\varepsilon)} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} (\psi - \psi(0, 0)) \, dA = 0. \quad (13)$$

Ved kontinuitet kan vi nå få $|\psi(x, y) - \psi(0, 0)|$ så liten vi vil for $(x, y) \in \mathbb{D}_\varepsilon$ bare vi velger ε liten nok. Da er man mer eller mindre egentlig i mål.

16.2.9

Vi finner direkte:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) &= \text{div}(f(r)\mathbf{r}) = \text{div}(f(r)(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)z) \\ &= f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} x + f(r) + f'(r) \frac{\partial r}{\partial y} y + f(r) + f'(r) \frac{\partial r}{\partial z} z \\ &= f'(r)x \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + f'(r)y \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\quad + z^2 + f'(r)z \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 3f(r) \\ &= f'(r) \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + 3f(r) \\ &= rf'(r) + 3f(r). \end{aligned} \quad (14)$$

At $f(r)\mathbf{r}$ er divergensfritt betyr at divergensen er 0. Dermed får vi likningen

$$rf'(r) + 3f(r) = 0 \quad (15)$$

eller om vi deler på $r \neq 0$ (det kan vi godt anta),

$$f'(r) + \frac{3}{r}f(r) = 0. \quad (16)$$

Vi kan løse dette ved foreksempel bruk av en integrerende faktor: $e^{3\ln(r)} = e^{\ln(r^3)} = r^3$ slik at vi ender opp med:

$$\frac{d}{dr} (r^3 f(r)) = 0 \quad (17)$$

eller

$$f(r) = Cr^{-3} \tag{18}$$

der C er en eller annen konstant.