

# Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 11, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

9. mars 2020

## 15.5.2

I sfæriske koordinater har vi:

$$x = a \sin \phi \cos \theta \quad (1)$$

$$y = a \sin \phi \sin \theta \quad (2)$$

$$z = a \cos \phi \quad (3)$$

slik at parametrisering for sfæren blir

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (4)$$

med partielle deriverte

$$\mathbf{r}_\phi = (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sin \theta, -a \sin \phi) \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-a \sin \phi \sin \theta, a \sin \phi \cos \theta, 0) \quad (6)$$

som gir kryssproduktet:

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{bmatrix} = (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta, a^2 \sin^2 \phi \sin \theta, a^2 \cos \phi \sin \phi) \quad (7)$$

som har lengde

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= a^2 \sqrt{\sin^4 \phi + \cos^2 \phi \sin^2 \phi} \\ &= a^2 \sin \phi \end{aligned} \quad (8)$$

siden  $\phi \in [0, \pi]$  (ellers måtte vi generelt hatt absoluttverdi av  $\sin \phi$ ). Dermed følger det at flatelementet er  $dS = a^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$ .

---

**15.5.7**

Vi bruker  $x, y$  som parametre og skriver  $z = x^2/2$ . Prosjeksjonen av flaten vår i  $xy$ -planet er kvartdisken  $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ . Med  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2/2)$  som parametrisering finner vi dermed:

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, x) \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_y = (0, 1, 0) \quad (10)$$

slik at

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-x, 0, 1) \quad (11)$$

sånn at lengden av dette er  $\sqrt{x^2 + 1}$ . Dermed må vi regne ut:

$$\begin{aligned} \iint_S x \sqrt{x^2 + 1} \, dS &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \sqrt{x^2 + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \, dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left( \sqrt{2-y^2}^3 - 1 \right) \, dy \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned} \quad (12)$$

**15.5.13**

Kjeglen skjærer planet i  $1 + y = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$  eller  $(1 + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ . Det vil si:

$$1 = 2(x^2 + y^2) - y^2 - 2y = 2x^2 + y^2 - 2y \quad (13)$$

som ved fullføring av kvadrat i  $y$  gir:

$$2 = 2x^2 + (y - 1)^2 \quad (14)$$

Dermed:

$$1 = x^2 + \left( \frac{y - 1}{\sqrt{2}} \right)^2. \quad (15)$$

---

Dette er en ellipse i  $x$  og  $y$ . Vi vil ikke bare ha ellipsen men innsiden også. Vi kan parametrisere ved bruk av parametre  $(r, \theta)$  tilsvarende polarkoordinater:

$$x(r, \theta) = r \cos(\theta) \quad (16)$$

$$y(r, \theta) = 1 + \sqrt{2}r \sin(\theta) \quad (17)$$

med  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, 1]$ . med  $z = 1 + y$  finner vi dermed  $z(r, \theta) = 2 + \sqrt{2}r \sin \theta$ . Dermed får vi parametrisering for  $\mathcal{S}$  gitt ved:

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, 1 + \sqrt{2}r \sin \theta, 2 + \sqrt{2}r \sin \theta). \quad (18)$$

Dermed:

$$\mathbf{r}_r = (\cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \sin \theta) \quad (19)$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-r \sin \theta, \sqrt{2}r \cos \theta, \sqrt{2}r \cos \theta). \quad (20)$$

Dermed:

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta & \sqrt{2} \sin \theta \\ -r \sin \theta & \sqrt{2}r \cos \theta & \sqrt{2}r \cos \theta \end{bmatrix} = (0, -\sqrt{2}r, \sqrt{2}r). \quad (21)$$

Dermed:

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = 2r, \quad (22)$$

og dermed tilslutt:

$$\iint_{\mathcal{S}} y \, dS = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{2}r \sin \theta)r \, dr \, d\theta = 2\pi. \quad (23)$$

### 15.5.15

Randen til projeksjonen av skjæringsflaten finner vi for  $x^2 = 1 - 3x^2 - y^2$  (når de to  $z$  uttrykkene er like hverandre). Dette gir  $4x^2 + y^2 = 1$  som er en ellipse. I første oktant får vi kun kvarte ellipsen med  $x, y \geq 0$ . Kall denne  $E$ . Vi bruker  $x, y$  som parametre og finner en parametrisering for  $\mathcal{S}$  gitt ved:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2), \quad (x, y) \in E. \quad (24)$$

Dermed:

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, 2x) \quad (25)$$

$$\mathbf{r}_y = (0, 1, 0) \quad (26)$$

som gir

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-2x, 0, 1) \quad (27)$$

slik at lengden av denne er  $\sqrt{4x^2 + 1}$ . Vi finner derfor:

$$\begin{aligned} \iint_S xz \, dS &= \iint_E x^3 \sqrt{4x^2 + 1} \, dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{4x^2 + 1} \sqrt{1 - 4x^2} \, dx \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1 - 16x^4} \, dx \\ &= \frac{1}{96} \end{aligned} \quad (28)$$

### 15.6.1

Vi sparer oss litt tid hvis vi merker oss at vi kun får bidrag fra fluks gjennom planet  $y = 0$  og  $\Pi$  gitt ved  $x + 2y + 3z = 6$ : det er ikke noe bidrag gjennom  $z = 0$  siden  $\mathbf{F}$  ikke har noe  $z$ -komponent, og det er ikke noe bidrag gjennom  $x = 0$  fordi  $\mathbf{F} \cdot (-1, 0, 0) = -x = 0$  når  $x = 0$ . Når  $y = 0$  finner vi fra  $\Pi$  at  $x + 3z = 6$ . Videre finner vi at  $\mathbf{F} \cdot (0, -1, 0) = -z$ . Fluksbidraget gjennom  $y = 0$  er derfor gitt ved:

$$\Phi_{y=0} = \iint_{x+3z \leq 6, x, z \geq 0} (-z) \, dA = - \int_0^2 z(6 - 3z) \, dz = -4. \quad (29)$$

Det gjenstår å finne fluksen gjennom  $\Pi$ . Det kan vi gjøre på følgende måte. Vi parametriserer  $\Pi$  ved bruk av  $x, y$  som gir oss:

$$\mathbf{r}(x, y) = \left( x, y, \frac{6 - x - 2y}{3} \right) \quad (30)$$

der  $(x, y) \in D$  og  $D$  er gitt som projeksjonen av  $\Pi$  ned i  $xy$ -planet. Dermed:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) \quad (31)$$

---

og siden denne har positiv  $z$ -komponent har vi funnet riktig normalvektor. Dermed blir fluksbidraget:

$$\begin{aligned}\Phi_{\Pi} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, dA \\ &= \iint_{x+2y \leq 6, x, y \geq 0} \left( \frac{x}{3} + \frac{2}{3}z(x, y) \right) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2y} \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{6-x-2y}{3} \right) \, dx \, dy \\ &= 10.\end{aligned}\tag{32}$$

Totalfluks er derfor  $\Phi = \Phi_{y=0} + \Phi_{\Pi} = 10 - 4 = 6$ .