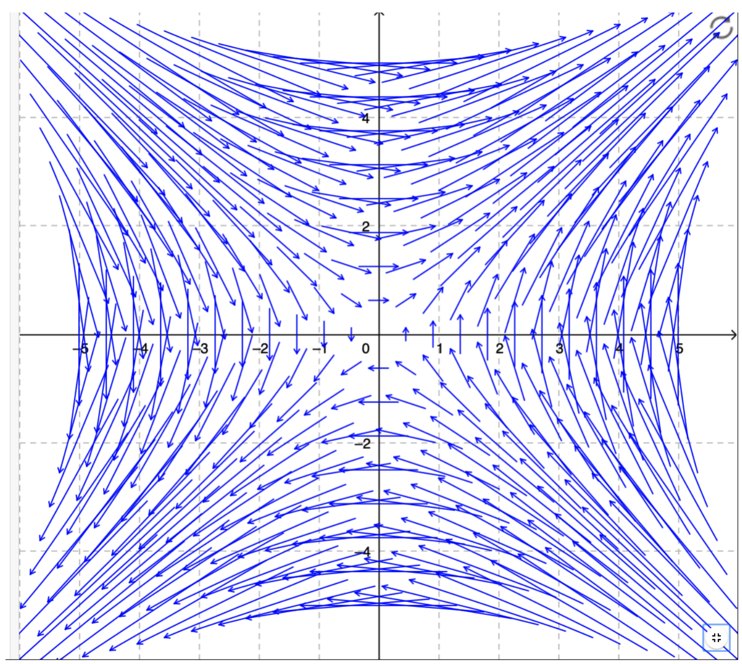
Løsningsforslag til anbefalte oppgaver uke 10, TMA4105 Matematikk 2, våren 2020

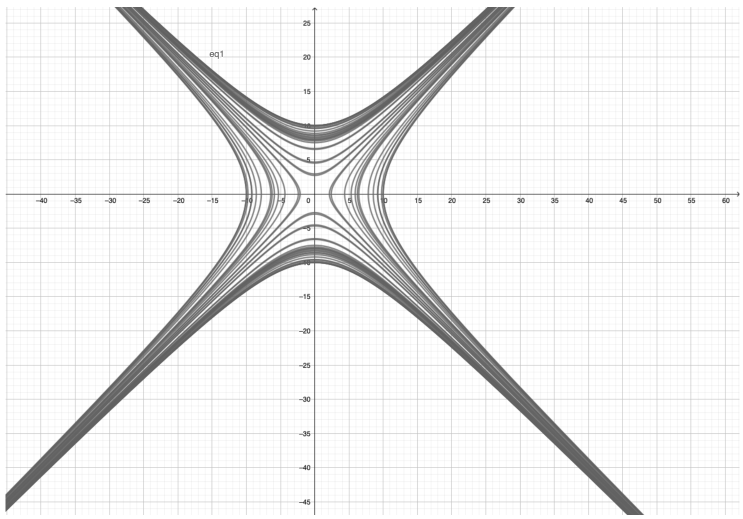
2. mars 2020

15.1.3

Feltlinjene er gitt ved $y = y(x)$ der $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$. Dermed $y\ dy = x\ dx$ eller $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$. Det gir dermed $y^2 = x^2 + K$. Plott av vektofeltet (blått) og feltlinjer (svart) er gitt nedenfor:



Vektorfeltet (oppgave 15.1.3)



Feltlinjer (oppgave 15.1.3)

$\boxed{15.2.3}$

Anta at **F** er konservativt. Da finnes det ϕ slik at $\phi_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \phi_y = -\frac{y}{x^2+y^2}$. Vekk fra origo ser vi at ϕ er annenordens kontinuerlig differensierbar og derfor må vi ha $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ her, men det er lett å se at $\phi_{xy} = -\phi_{yx}$. Altså er ikke **F** konservativ.

$\boxed{15.2.5}$

Anta at ϕ er en potensialfunksjon. Da har vi:

$$\phi_x = 2xy - z^2 \implies x^2y - z^2x + C(y,z) \tag{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_y = x^2 + C_y(y,z) = 2yz + x^2 \implies C_y(y,z) = 2yz \implies C(y,z) = y^2z + D(z) \tag{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_z = -2zx + D'(z) + y^2 = -2zx + y^2 \implies D'(z) = 0 \implies D(z) = K \tag{3}$$

der K er en ekte konstant (et tall). Dermed er **F** konservativt og potensialfunksjoner til **F** er på formen:

$$\phi(x,y,z) = x^2y - z^2x + y^2z + K \tag{4}$$

der K er en konstant.

$\boxed{15.2.7}$

La oss skrive $\mathbf{r} = (x, y, z), \mathbf{r}_0 := (a, b, c)$. Da har vi

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \tag{5}$$

Vektorfeltet vi er på jakt etter er $\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$. Pågrunn av symmetri holder det å finne foreksempel $\phi_x := -\frac{2(x-a)}{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)^2}$, for ϕ_y, ϕ_z fåes ved å erstatte i telleren $(x-a)$ med henholdsvis $y-b$ og $z-c$. Det er nå lett å se at vi ender opp da med

$$\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^4}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \tag{6}$$

$\boxed{15.2.9}$

En potensialfunksjon finnes via tilsvarende fremgangsmåte som tidligere oppgaver. Betegn potensialfunksjoner med ϕ. Vi finner

$$\phi_x = \frac{2x}{z} \implies \phi(x,y,z) = \frac{x^2}{z} + C(y,z) \tag{7}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_y = C_y(y,z) = \frac{2y}{z} \implies C(y,z) = \frac{y^2}{z} + D(z) \tag{8}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_z = -\frac{x^2+y^2}{z^2} + D'(z) = -\frac{x^2+y^2}{z^2} \implies D'(z) = 0 \implies D(z) = K \tag{9}$$

der K er en konstant. Dette viser at $\mathbf{F}$ er konservativ med potensialfunksjoner:

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + K. \tag{10}$$

Ekvipotensialflatene er gitt ved $\phi(x,y,z) = E$ der E er konstant. Med valget $K = 0$ (for enkelhetsskyld, men uten tap av generalitet), finner vi flatene

$$z = \frac{x^2+y^2}{E} \tag{11}$$

der $E \neq 0$, og hvis vi tillater $E = 0$ finner vi $x^2 + y^2 = 0$ eller $x = y = 0$. Det interessante er $E \neq 0$ så klart. Da får vi paraboloider. Feltlinjer kan vi finne foreksempel på følgende måte. Anta at integralkurven er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Dermed finner vi:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{z} \tag{12}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{z} \tag{13}$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{x^2+y^2}{z^2}. \tag{14}$$

Dermed:

$$\frac{z}{2x}\ dx = \frac{z}{2y}\ dy = -\frac{z^2}{x^2+y^2}\ dz \tag{15}$$

eller

$$\frac{1}{x}\ dx = \frac{1}{y}\ dy = -\frac{2z}{x^2+y^2}\ dz \tag{16}$$

som gir $\ln|x| = \ln|y| + C$ eller $y = Ax$ med A konstant. Innsatt i x^2+y^2 foran dz gir dermed

$$\frac{1}{x}\ dx = -\frac{2z}{x^2+A^2x^2}\ dz \tag{17}$$

eller

$$-2z\ dz = x(1+A^2)\ dx \tag{18}$$

og dermed

$$-z^2 = \frac{1}{2}x^2(1+A^2) + B \tag{19}$$

som dermed gir etter å ha ganget med 2 og erstattet $2b$ med B' og x^3A^2 med y^2:

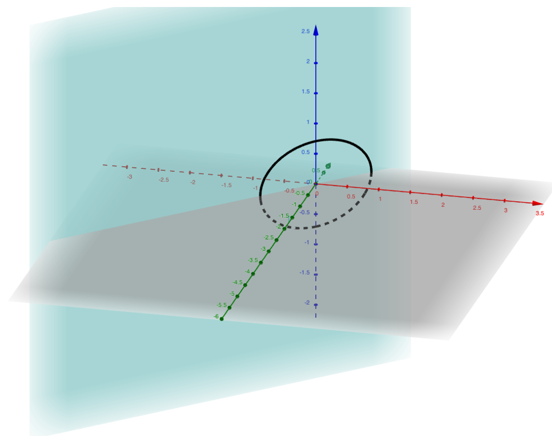
$$-2z^2 = x^2+y^2+B' \tag{20}$$

eller

$$-B' = 2z^2+x^2+y^2. \tag{21}$$

Merk nå at B må være negativ (eller i det minste ikke-positiv), siden $-z^2$ er det. Altså kan vi erstatte B' med en ikke-negativ konstant, si D slik at vi ender opp med ellpsoider

$$D = 2z^2+x^2+y^2. \tag{22}$$



En typisk feltlinje plottet via parametriseringen(e) i likning (23) (Oppgave 15.2.9)

Feltlinjene våre er disse ellipsoidene snittet med planene $y = Ax$, som dermed gir oss ellipser. Vi kan også typisk gi parametriseringer av deler (positive og negative z) for disse med x som parameter, si

$$\mathbf{r}(t) := \left(t, At, \pm\sqrt{\frac{D - t^2 - A^2t^2}{2}} \right). \tag{23}$$

Ovenfor har vi plottet en typisk slik feltlinje med $A = 1 = D$ i planet $y = x$ (siden vi har $\pm$ får vi egentlig to parametriseringer).

15.3.2

Vi finner $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2t, 1, 2t)$ og dermed $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{8t^2 + 1}$. Dermed:

$$\int_{\mathcal{C}} y \, ds = \int_0^m y(t)v(t) \, dt = \int_0^m t\sqrt{8t^2 + 1} \, dt = \frac{1}{24} \left((8m^2 + 1)^{3/2} - 1 \right). \tag{24}$$

15.3.15

Vi parametriserer projeksjonen av sylinderen ved $x = x(t) = a\cos(t), y = y(t) = a\sin(t), t \in [0, 2\pi]$. Dermed finner vi $z = z(t) = x(t) = a\cos(t)$ og parametriseringen for skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = a^2$ og planet $z = x$ blir:

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos(t), \sin(t), \cos(t)), t \in [0, 2\pi]. \tag{25}$$

Skal vi være i første oktant må vi faktisk videre restriktere $t \in [0, \pi/2]$. Vi deriverer og finner $\mathbf{v}(t) = a(-\sin(t), \cos(t), -\sin(t))$ og dermed $v(t) = |a|\sqrt{1+\sin^2(t)}$. Dermed:

$$\int_{\mathcal{C}} x\ ds = a|a| \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{1+\sin^2(t)}\ dt = \frac{a|a|}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right), \tag{26}$$

$\boxed{15.4.17}$

Anta at $a > 0$ for enkelhetsskyld. Vi kan parametrisere $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ orientert mot klokka ved bruk av $x(t) = a\cos(t), y(t) = a\sin(t), t \in [0, \pi]$. Dermed finner vi

(a)

$$\int_{\mathcal{C}} x\ dy = \int_0^{\pi} x(t)y'(t)\ dt = a^2 \int_0^{\pi} \cos^2(t)\ dt = \frac{\pi}{2}a^2, \tag{27}$$

og

(b)

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx = \int_0^{\pi} y(t)x'(t)\ dt = -a^2 \int_0^{\pi} \sin^2(t)\ dt = -\frac{\pi}{2}a^2. \tag{28}$$

.