TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 14

Våren 2020

Læringsoppgaver

La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $z = x^2 + (y+1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y-1)^2$, og la $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, x^2 + y^2)$.

$\boxed{1}$ Regn ut

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut fra T.

$\boxed{2}$ Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{\text{U}}$ Sirkulasjonen til et elektrisk felt langs en enkel, lukket kurve $\mathcal{C}$ svarer til endringen i den magnetiske fluksen,

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

gjennom enhver orientert flate $\mathcal{S}$ med rand $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$, beskrevet ved

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vis at

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Dette kalles *Faradays lov* (på differensialform) og er en av *Maxwells likninger*.

Möbius-oppgaver

$\boxed{1}$ La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom sylinderen $4x^2 + y^2 = 3$ og grafen til en glatt funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dvs. flaten $z = f(x, y)$. Kurven er orientert mot klokken sett ovenfra. Regn ut integralet

$$\oint_C -y^3 dx + 4x^3 dy - 3z^2 dz.$$

$\boxed{2}$ Temperaturen i et rom er gitt ved funksjonen

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2}(4x^2 + 5y^2 + 4z^2).$$

Ved tiden $t = 0$ flyr en flue gjennom punktet $(\sqrt{3}, 1, 2)$ langs skjæringskurven mellom de to flatene $z = x^2 - y^2$ og $z^2 = x^2 + y^2$.

Hvor stor temperaturendring, $\frac{dT}{dt}$, opplever fluen ved $t = 0$ dersom dens vertikale hastighet ved dette tidspunktet er 4?