TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 13

Våren 2020

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ La T være det lukkede området i $\mathbb{R}^3$ som ligger mellom de to kuleskallene $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ og $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ og som i tillegg er avgrenset av yz-planet, dvs. $x \geq 0$. La $\mathcal{S} = \partial T$ være overflaten til T. Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xz, 2)$.

a) Bestem fluksen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z)$ ut av flaten $\mathcal{S}$, dvs bestem $\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, der $\widehat{\mathbf{N}}$ er en enhetsnormalvektor som peker ut av $\mathcal{S}$.

b) Bestem deretter fluksen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z)$ ut av det ytterste halvkuleskallet.

$\boxed{2}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{for} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Vis at $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ der $\mathbf{F}(x, y, z)$ er definert.

La $\mathcal{S}_R$ være kuleflaten med sentrum i $(0, 0, 0)$ og radius R. Det kan vises at

$$\oiint_{\mathcal{S}_R} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 4\pi,$$

der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen som peker ut av kulen.

Forklar hva som er galt med følgende utsagn:

Bruker vi Divergensteoremet på kulen B_R, der $\mathcal{S}_R = \partial B_R$, så er

$$\oiint_{\mathcal{S}_R} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{B_R} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 0.$$

$\boxed{\text{U}}$ Et resultat i elektromagnetisme sier at det elektriske feltet skapt av en punktladning q plassert i $(0, 0, 0)$ er gitt ved

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

der ϵ_0 er en fysisk konstant kalt vakuumets permittivitet.

Vis at

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

for alle lukkede flater $\mathcal{S}$ som omslutter $(0, 0, 0)$ og der $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ som peker vekk fra $(0, 0, 0)$. Dette kalles *Gauss' lov* og er den første av *Maxwells ligninger*.

Möbius-oppgaver

$\boxed{1}$ La D være området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flatene $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 8}$, $z = 0$ og $z = 4$. Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, y + x, z + 2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Regn ut

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\mathcal{S}$ er den krumme delen av randen til D og $\widehat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til $\mathcal{S}$ med positiv z-komponent.

$\boxed{2}$ Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (8x + 8x^3 z, -2y(x^2 + z^2), -(12x^2 z^2 + 8y^2 z)). \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

Finn området T i $\mathbb{R}^3$ slik at

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$$

er størst mulig, der ∂T er randen til T og $\widehat{\mathbf{N}}$ peker ut av T.