TMA4105 Matematikk 2

Interaktiv forelesning uke 12

Våren 2020

Læringsoppgaver

$\boxed{1}$ Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, -3y, 2z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ikke har et vektorpotensial, altså at det ikke finnes noe vektorfelt $\mathbf{G}$ slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z)$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$\boxed{2}$ La R være området i $\mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 1$ og $y \geq 0$.

a) Regn ut

$$\iint_R (4 - x)\, dx\, dy.$$

b) La $\mathcal{C} = \partial R$ være randen til R orientert mot klokken, og la $\mathcal{C}'$ være den krumme delen av $\mathcal{C}$. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}'} (xy + \ln(x^2 + 1))\, dx + (4x + e^{y^2} + 3 \arctan y)\, dy.$$

$\boxed{\text{U}}$ La $\mathcal{S}_r$ være kuleflaten med sentrum i origo og radius r, og la vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\widehat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til $\mathcal{S}_r$ som peker utover. Bestem grenseverdien

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{3}{4\pi r^3} \oiint_{\mathcal{S}_r} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Sammenlign med divergensen til $\mathbf{F}$.

Möbius-oppgaver

$\boxed{1}$ La $\mathcal{C}$ være randen til den delen av disken med sentrum i origo og radius 1 som ligger i første kvadrant, orientert mot klokken. Bruk Greens teorem til å regne ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (2y^2 - 4x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (4xy + 3y\sqrt{x^2 + y^2})dy.$$

Svaret skal være et eksakt, rasjonalt tall.

$\boxed{2}$ La $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$, og la $\mathcal{C}$ være randen til D orientert mot klokken. Regn ut integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin x^2 - y^2)\, dx + (\cos y^2 + 3xy)\, dy$$

ved å bruke Greens teorem.