

Velkommen
til
interaktive forelesninger
i
Matematikk 2
Uke 13

Dagens tema

- Divergensteoremet

Læringsoppgave 1(a)

Hint 1

Divergensteoremet sier at

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Læringsoppgave 1(a)

Hint 1

Divergensteoremet sier at

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Hint 2

Kulekoordinater $(x, y, z) \mapsto (R, \phi, \theta)$:

$$x = R \sin \phi \cos \theta, \quad y = R \sin \phi \sin \theta, \quad z = R \cos \phi,$$

og $dV = R^2 \sin \phi dR d\phi d\theta$.

Læringsoppgave 1(a)

Løsningsforslag

Fluksintegralet blir 40π .

Læringsoppgave 1(b)

Hint 1

Fluksen ut gjennom T kan uttrykkes som

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Læringsoppgave 1(b)

Hint 1

Fluksen ut gjennom T kan uttrykkes som

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Hint 2

Siden $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut av S (altså inn i S_1), får vi

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = - \oiint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\hat{\mathbf{N}}) dS = - \iiint_{\text{Halvkule}_1} \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Læringsoppgave 1(b)

Løsningsforslag

Fluksintegralet blir $\frac{81}{2}\pi$.

Læringsoppgave 2

Hint 1

F er ikke definert i hele B_R .

Læringsoppgave 2

Hint 1

F er ikke definert i hele B_R .

Hint 2

F er derimot definert i hele $B_R \setminus B_r$. Her kan vi bruke divergensteoremet.

Læringsoppgave 2

Løsningsforslag

Man må passe på at \mathbf{F} må være definert overalt for å kunne bruke divergensteoremet.

Læringsoppgave U

Hint 1

Ved bruk av divergensteoremet får vi at

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = - \oiint_{S_r} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Læringsoppgave U

Løsningsforslag

Vi har vist at

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

MA-oppgave 1

Hint 1

Divergensteoremet sier at (for $\hat{\mathbf{N}}^*$ ut av ∂D)

$$\begin{aligned}\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS \\ &= \iint_{S_{\text{krum}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS + \iint_{S_{\{z=0\}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS + \iint_{S_{\{z=4\}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS.\end{aligned}$$

MA-oppgave 1

Hint 1

Divergensteoremet sier at (for $\hat{\mathbf{N}}^*$ ut av ∂D)

$$\begin{aligned}\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS \\ &= \iint_{S_{\text{krum}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS + \iint_{S_{\{z=0\}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS + \iint_{S_{\{z=4\}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS.\end{aligned}$$

Hint 2

Vis at

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 160\pi, \quad \iint_{S_{\{z=0\}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS = -16\pi, \quad \iint_{S_{\{z=4\}}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^* dS = 144\pi.$$

MA-oppgave 1

Løsningsforslag

Fluksintegralet blir -32π .

MA-oppgave 2

Hint 1

Divergensteoremet sier at

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

MA-oppgave 2

Hint 1

Divergensteoremet sier at

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Hint 2

Der $\nabla \cdot \mathbf{F} \geq 0$, er volumintegralet ikke-negativt.

MA-oppgave 2

Løsningsforslag

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} \leq 1 \right\}.$$

Dvs., ellipsoiden med sentrum i $(0, 0, 0)$ og halvaksler $a = 2, b = 1, c = 2$.