Plenumsregning uke 5

TMA4105 Matematikk 2

Onsdag 30. Januar 2019

Dagen i dag

- **Eks S11.4**: Kjerneregelen
- **12.6.18**: Jacobimatrise/Partiellderiverte
- **12.6.21**: Deriverbarhet $\Rightarrow$ Kontinuitet
- **12.7.28**: Gradient og opplevd endring
- **Eks V02.8**: Implisitt funksjonsteorem og linearisering

Eksamen sommer 2011, oppgave 4

La $f(x, y, z)$ og $g(x, y)$ være to deriverbare funksjoner. Hvilket av uttrykkene nedenfor er et uttrykk for $\frac{\partial w}{\partial x}$ når $w(x, y) = f(x, y, z)$, der $z = g(x, y)$?

Alt 1) $\frac{\partial f}{\partial x}$

Alt 2) $\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$

Alt 3) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$

Alt 4) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$

Alt 5) $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}$

Eksamen sommer 2011, oppgave 4

La $f(x, y, z)$ og $g(x, y)$ være to deriverbare funksjoner. Hvilket av uttrykkene nedenfor er et uttrykk for $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ når $w(x, y) = f(x, y, z)$, der $z = g(x, y)$?

Alt 1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Alt 2) $\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Alt 3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Alt 4) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$

Alt 5) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial x}$

Oppgave 12.6.18

Finn Jacobimatrisen til transformasjonen $\mathbf{f}(R, \phi, \theta) = (x, y, z)$ hvor

$$x = R\sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = R\sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = R\cos(\phi).$$

De nye koordinatene (R, ϕ, θ) kalles *kulekoordinater* (Spherical coordinates) i xyz-rommet.

Oppgave 12.6.21

Vis at dersom en funksjon $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, er deriverbar i et punkt $\mathbf{a}$, så er den også kontinuerlig i punktet $\mathbf{a}$.

- Husk: f har kontinuerlige partiellderiverte i $\mathbf{a} \implies f$ er deriverbar i $\mathbf{a} \implies f$ er kontinuerlig i $\mathbf{a}$

Oppgave 12.6.21

Vis at dersom en funksjon $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, er deriverbar i et punkt $\mathbf{a}$, så er den også kontinuerlig i punktet $\mathbf{a}$.

- Husk: f har kontinuerlige partiellderiverte i $\mathbf{a} \implies f$ er deriverbar i $\mathbf{a} \implies f$ er kontinuerlig i $\mathbf{a}$

Oppgave 12.7.28

Temperaturen i $\mathbb{R}^3$ (rommet) er gitt ved

$$T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2.$$

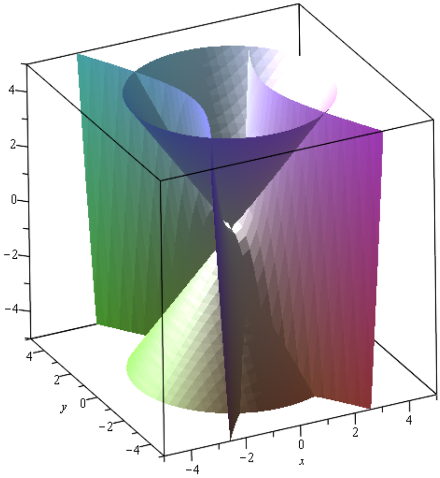
En flue flyr langs skjæringskurven mellom flatene

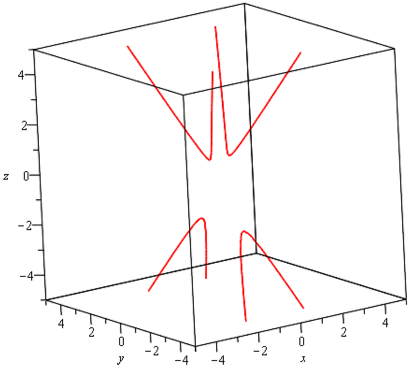
$$z = 3x^2 - y^2 \qquad \text{og} \qquad 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$$

Hvis fluens fart i punktet $(1, 1, 2)$ er lik 7, hvilken temperaturendring opplever da fluen i det øyeblikket den suser gjennom punktet $(1, 1, 2)$? Anta at fluen beveger langs kurven i økende z-retning (dvs. «oppover») i dette punktet.

Oppgave 12.7.28

NB! Her er skjæringskurven(e) vanskelig å parametrisere!





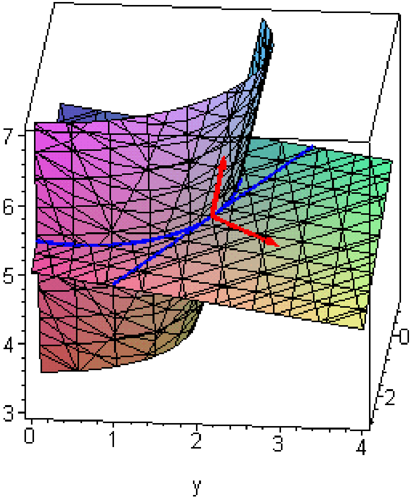
Oppgave 12.7.28

Nyttig observasjon

En tangentvektor til skjæringskurven mellom to flater ligger i tangentplanene til begge flatene, og er dermed vinkelrett på begge normalvektorene til flatene.

Strategi:

1. Finn normalvektorer til flatene
2. Finn en tangentvektor til skjæringskurven i punktet $(1, 1, 2)$.
3. Finn fluens hastighetsvektor, $\mathbf{v}$, i punktet $(1, 1, 2)$.
4. Regn ut opplevd temperaturendring: $\mathbf{v} \cdot \nabla T(1, 1, 2)$.



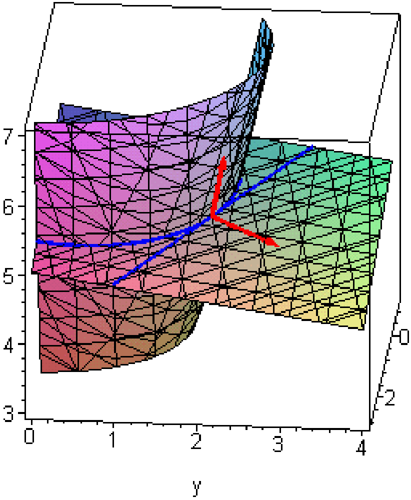
Oppgave 12.7.28

Nyttig observasjon

En tangentvektor til skjæringskurven mellom to flater ligger i tangentplanene til begge flatene, og er dermed vinkelrett på begge normalvektorene til flatene.

Strategi:

1. Finn normalvektorer til flatene
2. Finn en tangentvektor til skjæringskurven i punktet $(1, 1, 2)$.
3. Finn fluens hastighetsvektor, $\mathbf{v}$, i punktet $(1, 1, 2)$.
4. Regn ut opplevd temperaturendring: $\mathbf{v} \cdot \nabla T(1, 1, 2)$.



Eksamen vår 2002, oppgave 8

Betrakt ligningen

$$t\ln(u) + x^2 + \frac{1}{2}t\ln(\pi t) = 0 \qquad \text{for } 0 < t < 2x^2.$$

Det oppgis at punktet $(x, u, t) = (1, \frac{1}{e\sqrt{\pi}}, 1)$ tilfredsstiller ligningen, og at $\frac{1}{e\sqrt{\pi}} \approx 0{,}208$.

a) Forklar hvorfor dette definerer t implisitt som en funksjon av x og u.

b) Finn de partiellderiverte $\frac{\partial t}{\partial x}$ og $\frac{\partial t}{\partial u}$ for $(x, u) = (1, \frac{1}{e\sqrt{\pi}})$.

c) Finn en tilnærmet verdi for t når $x = 1{,}1$ og $u = 0{,}2$.