Plenumsregning uke 13

TMA4105 Matematikk 2 - Eirik Berge

Onsdag 27. mars 2019

Oversikt over oppgavene

- **Eksamen Vår 2007, Oppgave 2** Kritiske punkter (repitisjon).
- **Eksamen Vår 2008, Oppgave 5** Polarkurver med Greens theorem og divergensteoremet.
- **Eksamen Sommer 2018, Oppgave 2** Enhetstangent/normal og krumning (repitisjon).
- **Eksamen Vår 2014, Oppgave 6** Divergensteorem-oppgave.

Eksamen Vår 2007, Oppgave 2

La f vere funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

a) Finn eventuelle kritiske punkt for $f(x, y)$.
Finn absolutt maksimum og minimum for $f(x, y)$ på området gitt ved $x^2 + y^2 \leq 9$.

b) For $r > 0$, la A_r vere området gitt ved $x^2 + y^2 \leq r^2$.
For kvar $r > 0$, finn maksimum og minimum for $f(x, y)$ på A_r.
Avgjer om $f(x, y)$ har absolutt maksimum og /eller absolutt minimum i $\mathbb{R}^2$, og bestem desse dersom dei finnest.

Eksamen Vår 2007, Oppgave 2

La f vere funksjonen gitt ved

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

a) Finn eventuelle kritiske punkt for $f(x,y)$.
Finn absolutt maksimum og minimum for $f(x,y)$ på området gitt ved $x^2+y^2 \leq 9$.

b) For $r>0$, la A_r vere området gitt ved $x^2+y^2 \leq r^2$.
For kvar $r>0$, finn maksimum og minimum for $f(x,y)$ på A_r.
Avgjer om $f(x,y)$ har absolutt maksimum og /eller absolutt minimum i $\mathbb{R}^2$, og bestem desse dersom dei finnest.

Eksamen Vår 2008, Oppgave 5

Kurven $\mathcal{C}$ er gitt i polarkoordinater ved

$$\mathcal{C}: \qquad r(\theta) = \frac{3}{2} + \cos\theta \quad \text{for} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 2y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + y\right)\mathbf{j}. \tag{1}$$

a) Finn arealet av området innenfor kurven $\mathcal{C}$.

b) Finn verdien av integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

når $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken.

c) Finn fluksen av $\mathbf{F}$ over $\mathcal{C}$ i retning $\mathbf{n}$, der $\mathbf{n}$ er den enhetsnormalen til $\mathcal{C}$ som peker vekk fra origo.

Mellomregning til a)

$$\mathrm{Areal}(R)$$

Mellomregning til a)

$$\text{Areal}(R) = \iint_R 1 \, dA$$

Mellomregning til a)

$$\text{Areal}(R) = \iint_R 1 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} r \, dr d\theta$$

Mellomregning til a)

$$\text{Areal}(R) = \iint_R 1 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} r \, dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} d\theta$$

Mellomregning til a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Areal}(R) = \iint_R 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos(\theta)\right)^2 d\theta
\end{aligned}$$

Mellomregning til a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Areal}(R) = \iint_R 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos(\theta)\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{9}{4} + 3\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\, d\theta
\end{aligned}
$$

Mellomregning til a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Areal}(R) = \iint_R 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos(\theta)\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{9}{4} + 3\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{9\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2\theta)\, d\theta
\end{aligned}
$$

Mellomregning til a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Areal}(R) = \iint_R 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos(\theta)\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{9}{4} + 3\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{9\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{9\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Mellomregning til a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Areal}(R) = \iint_R 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\frac{3}{2}+\cos(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos(\theta)\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{9}{4} + 3\cos(\theta) + \cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{9\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{9\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Eksamen Vår 2008, Oppgave 5

Kurven $\mathcal{C}$ er gitt i polarkoordinater ved

$$\mathcal{C}: \qquad r(\theta) = \frac{3}{2} + \cos\theta \quad \text{for} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 2y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + y\right)\mathbf{j}. \tag{2}$$

a) Finn arealet av området innenfor kurven $\mathcal{C}$.

b) Finn verdien av integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

når $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken.

c) Finn fluksen av $\mathbf{F}$ over $\mathcal{C}$ i retning $\mathbf{n}$, der $\mathbf{n}$ er den enhetsnormalen til $\mathcal{C}$ som peker vekk fra origo.

Eksamen Vår 2008, Oppgave 5

Kurven $\mathcal{C}$ er gitt i polarkoordinater ved

$$\mathcal{C}: \qquad r(\theta) = \frac{3}{2} + \cos\theta \quad \text{for} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 2y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + y\right)\mathbf{j}. \tag{2}$$

a) Finn arealet av området innenfor kurven $\mathcal{C}$.

b) Finn verdien av integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

når $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken.

c) Finn fluksen av $\mathbf{F}$ over $\mathcal{C}$ i retning $\mathbf{n}$, der $\mathbf{n}$ er den enhetsnormalen til $\mathcal{C}$ som peker vekk fra origo.

Eksamen Sommer 2018, Oppgave 2

En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2 + \sqrt{2}\cos(t), 1 - \sin(t), 3 + \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}(t)$ og enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}(t)$ for et vilkårlig punkt på kurven. Bestem krumningen $\kappa(t)$ i et vilkårlig punkt på kurven.

Eksamen Sommer 2018, Oppgave 2

En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2 + \sqrt{2}\cos(t), 1 - \sin(t), 3 + \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}(t)$ og enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}(t)$ for et vilkårlig punkt på kurven. Bestem krumningen $\kappa(t)$ i et vilkårlig punkt på kurven.

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Eksamen Sommer 2018, Oppgave 2

En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2 + \sqrt{2}\cos(t), 1 - \sin(t), 3 + \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}(t)$ og enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}(t)$ for et vilkårlig punkt på kurven. Bestem krumningen $\kappa(t)$ i et vilkårlig punkt på kurven.

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \hat{\mathbf{N}}(t) = \frac{\hat{\mathbf{T}}'(t)}{|\hat{\mathbf{T}}'(t)|}$$

Eksamen Sommer 2018, Oppgave 2

En kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2 + \sqrt{2}\cos(t), 1 - \sin(t), 3 + \sin(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}(t)$ og enhetsnormalvektoren $\hat{\mathbf{N}}(t)$ for et vilkårlig punkt på kurven. Bestem krumningen $\kappa(t)$ i et vilkårlig punkt på kurven.

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \hat{\mathbf{N}}(t) = \frac{\hat{\mathbf{T}}'(t)}{|\hat{\mathbf{T}}'(t)|},$$

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d}{dt}\left(|\mathbf{r}'(t)|\right)\hat{\mathbf{T}}(t) + \kappa(t)|\mathbf{r}'(t)|^2\hat{\mathbf{N}}(t).$$

Eksamen Vår 2014, Oppgave 6

La **F** denotere vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y, (3y^2 - 1)z)$ definert på hele $\mathbb{R}^3$.

a) Finn divergensen til vektorfeltet **F**.

b) Regn ut fluksen av **F** gjennom den delen av flaten $z = \ln(2 - (x^2 + y^2)^2)$ som ligger over xy-planet.

Eksamen Vår 2014, Oppgave 6

La $\mathbf{F}$ denotere vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y, (3y^2 - 1)z)$ definert på hele $\mathbb{R}^3$.

a) Finn divergensen til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

b) Regn ut fluksen av $\mathbf{F}$ gjennom den delen av flaten $z = \ln(2 - (x^2 + y^2)^2)$ som ligger over xy-planet.