Plenumsregning uke 12

TMA4105 Matematikk 2 - Eirik Berge

Onsdag 20. mars 2019

Oversikt over oppgavene som skal bli gått igjennom

- **Eksamen sommer 2016, oppgave 7** Greens Theorem vs. Parametrisering.
- **Eksamen Vår 2013, Oppgave 6** Rotasjonsfrie (curlfrie) og konservative vektorfelt.
- **Eksamen vår 2012, oppgave 5** Regning på ellipser ved å bruke Greens teorem.
- **Bonusoppgave** En geometrisk tolkning av curl.

Eksamen sommer 2016, oppgave 7 (Reprise)

La $\mathcal{C}$ være randen til firkanten med hjørner i $(-2,1)$, $(-2,-3)$, $(1,0)$ og $(1,7)$, der $\mathcal{C}$ er orientert mot urviseren.

Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + 2x\,dy,$$

ved å bruke Greens theorem.

Eksamen Vår 2013, Oppgave 6

a) Vis at vektorfeltet **F** gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} \quad \text{for} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

er curlfritt (det vil si, curl $\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} = 0$ for alle $(x, y) \neq (0, 0)$).

b) La $\mathcal{C}$ være kurven i xy-planet som starter i $(1, 0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ nøyaktig én gang. Anta at $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

og avgjør om **F** er et konservativt vektorfelt. Begrunn svaret.

Eksamen Vår 2013, Oppgave 6

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} \quad \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

er curlfritt (det vil si, curl $\mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{k} = 0$ for alle $(x,y) \neq (0,0)$).

b) La $\mathcal{C}$ være kurven i xy-planet som starter i $(1,0)$ og gjennomløper sirkelen $x^2+y^2=1$ nøyaktig én gang. Anta at $\mathcal{C}$ er orientert mot klokken. Regn ut

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

og avgjør om $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt. Begrunn svaret.

Eksamen Vår 2012, Oppgave 5

a) Ligningen $4x^2 + 24x + 9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til store og lille halvakse, og skissér ellipsen.

b) Den rette linja $y = -2x/\sqrt{3}$ deler ellipsen fra a) i to deler. La $\mathcal{C}$ være den korteste av disse to delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy.$$

(Hint: Parametriseringen $x = 3\cos t - 3$, $y = 2\sin t$ kan brukes.)

c) Regn ut arealet avgrensa av $\mathcal{C}$ og linja $y = -2x/\sqrt{3}$. (Hint: Greens teorem kan brukes.)

Eksamen Vår 2012, Oppgave 5

a) Ligningen $4x^2 + 24x + 9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til store og lille halvakse, og skissér ellipsen.

b) Den rette linja $y = -2x/\sqrt{3}$ deler ellipsen fra a) i to deler. La $\mathcal{C}$ være den korteste av disse to delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy.$$

(Hint: Parametriseringen $x = 3\cos t - 3$, $y = 2\sin t$ kan brukes.)

c) Regn ut arealet avgrensa av $\mathcal{C}$ og linja $y = -2x/\sqrt{3}$. (Hint: Greens teorem kan brukes.)

Eksamen Vår 2012, Oppgave 5

a) Ligningen $4x^2 + 24x + 9y^2 = 0$ beskriver en ellipse. Finn senteret til ellipsen, samt lengden til store og lille halvakse, og skissér ellipsen.

b) Den rette linja $y = -2x/\sqrt{3}$ deler ellipsen fra a) i to deler. La $\mathcal{C}$ være den korteste av disse to delene, orientert fra høyre mot venstre. Finn

$$\int_{\mathcal{C}} -y\, dx + x\, dy.$$

(Hint: Parametriseringen $x = 3\cos t - 3$, $y = 2\sin t$ kan brukes.)

c) Regn ut arealet avgrensa av $\mathcal{C}$ og linja $y = -2x/\sqrt{3}$. (Hint: Greens teorem kan brukes.)

Bonusoppgave

La $\mathcal{C}_\epsilon$ være sirkelen $x^2 + y^2 = \epsilon^2$, orientert mot klokken, og la vektorfeltet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \, .$$