Plenumsregning uke 4

TMA4105 Matematikk 2

Onsdag 23. januar 2019

Dagen i dag

- **10.5.3**: Kvadratiske flater
- **12.1.24**: Nivåkurver
- **12.2.7**: Grenseverdi
- **12.3.36**: Partiellderiverte og kontinuitet
- **12.4.4**: Andreordens partiellderiverte

Oppgave 10.5.3

Identifiser flaten gitt ved

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 27 = 0$$

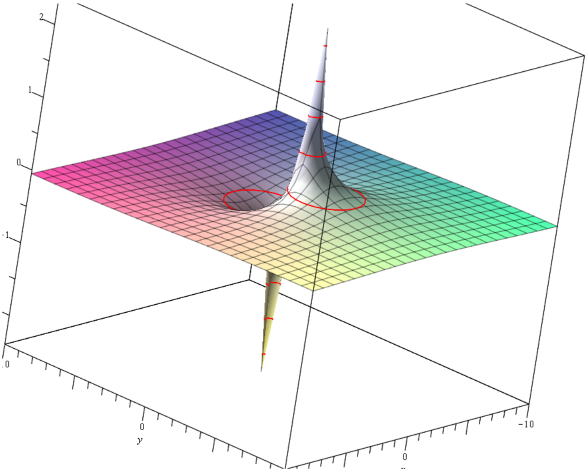
og skisser flaten i rommet.

Oppgave 12.1.24

Skisser noen av nivåkurvene til funksjonen

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{(definert for } (x, y) \neq (0, 0))$$

Oppgave 12.1.24



Grenseverdier

Nyttig observasjon

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L \iff f(\mathbf{x}) \to L \text{ når } \mathbf{x} \to \mathbf{a} \text{ langs } \textit{alle} \text{ kurver gjennom } \mathbf{a}$$

- For å bevise at en grense *ikke eksisterer* holder det å finne to kurver som gir ulik grenseverdi.
- Kurver som er vanlige å skjekke er x-aksen ($y = 0$), y-aksen ($x = 0$), den rette linjen $y = kx$ for $k \in \mathbb{R}$, og kurven $y = x^2$.

Grenseverdier

Nyttig observasjon

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L \iff f(\mathbf{x}) \to L \text{ når } \mathbf{x} \to \mathbf{a} \text{ langs } \textit{alle} \text{ kurver gjennom } \mathbf{a}$$

- For å bevise at en grense *ikke eksisterer* holder det å finne to kurver som gir ulik grenseverdi.
- Kurver som er vanlige å skjekke er x-aksen ($y = 0$), y-aksen ($x = 0$), den rette linjen $y = kx$ for $k \in \mathbb{R}$, og kurven $y = x^2$.

Grenseverdier

For å bevise at en grense *eksisterer* (og er lik L) kan man bruke:

1. Polarkoordinater
2. Argument med ulikheter
3. Definisjonen (et ϵ, δ-argument)
4. Kontinuitet av involverte funksjoner

- Vi kan se på grensen langs spesifikke kurver for å gjette verdien av L.

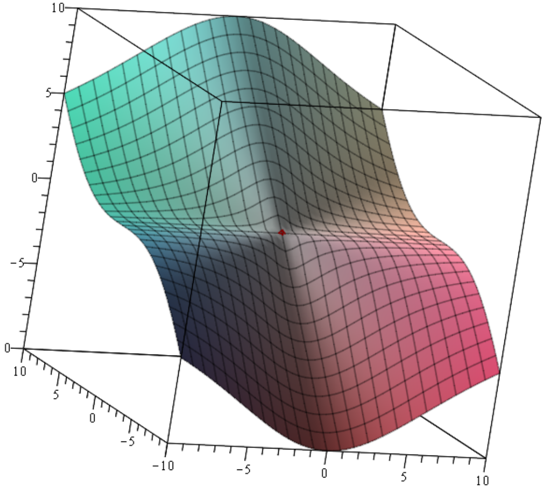
Oppgave 12.2.7

Bestem grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

eller forklar hvorfor den ikke eksisterer.

Oppgave 12.2.7



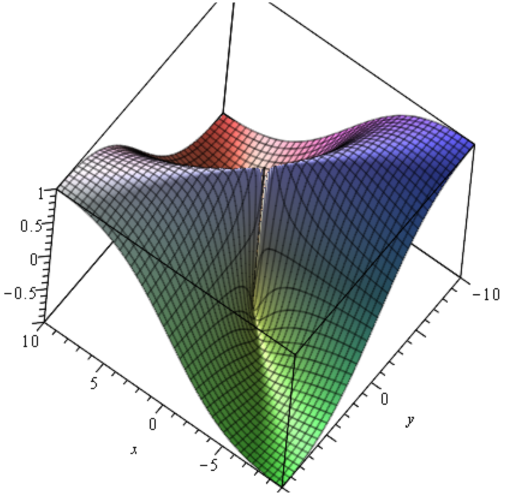
Oppgave 12.3.36

La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{for } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Vis at både $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0,0)$, til tross for at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.

Oppgave 12.3.36



Oppgave 12.3.36

For funksjoner av èn variabel har vi at

$$g'(x_0) \text{ eksisterer} \Longrightarrow g \text{ kontinuerlig i } x_0.$$

Dette gjelder altså ikke for de partiellderiverte til en flervariabel funksjon.

Oppgave 12.4.4

Bestem de andre-ordens partiellderiverte til funksjonen

$$f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2} \text{ (definert i hele planet).}$$

Merk at $f_{xy} = f_{yx}$ for $(x, y) \neq (0, 0)$, men $f_{xy}(0, 0)$ og $f_{yx}(0, 0)$ eksisterer ikke.

Oppgave 12.4.4

Bestem de andre-ordens partiellderiverte til funksjonen

$$f(x,y) = \sqrt{3x^2 + y^2} \text{ (definert i hele planet).}$$

Merk at $f_{xy} = f_{yx}$ for $(x,y) \neq (0,0)$, men $f_{xy}(0,0)$ og $f_{yx}(0,0)$ eksisterer ikke.

Oppgave 12.4.4