TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 6

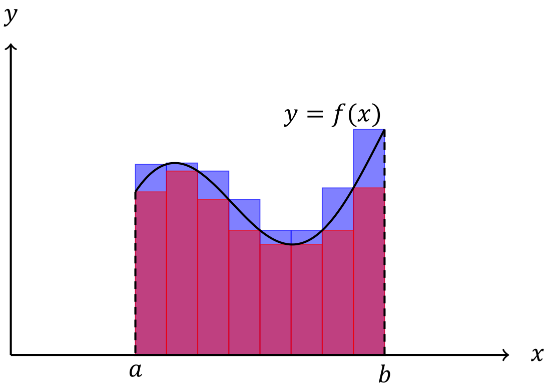
Ole Brevig

Institutt for matematiske fag

Nøkkelbegreper — Uke 7

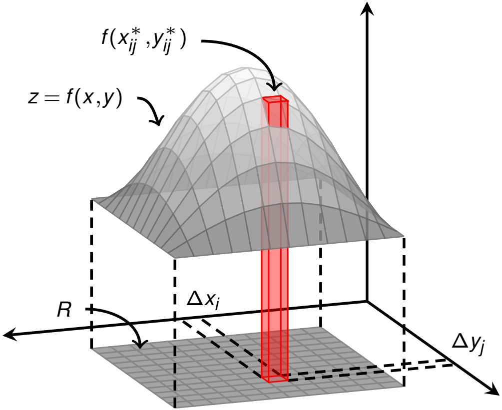
- Dobbeltintegraler
  - Riemannsummer
  - Egenskaper til dobbeltintegraler
- Enkle (x-enkle, y-enkle) integrasjonsområder
- Itererte integraler
- Bytte av integrasjonsrekkefølge
- Uegentlige integraler for funksjoner med konstant fortegn
- Middelverdier for funksjoner av flere variable

Bestemte integraler



$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} R(f, P)$$

Dobbeltintegraler



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}$$

Egenskaper til dobbeltintegraler

La $f(x, y)$ være en funksjon som er integrerbar over en lukket og begrenset mengde D.

(1) $\iint_D dA = \text{areal}(D)$

(2) Hvis $\text{areal}(D) = 0$, så er $\iint_D f(x, y)\, dA = 0$

(3) Hvis $f(x, y) \geq 0$ på D så er

$$\iint_D f(x, y)\, dA = V$$

der V er volumet til legemet som ligger under grafen $z = f(x, y)$ og over D

(4) Hvis $D_1, D_2, \ldots, D_k$ er ikke-overlappende mengder og f er integrerbar på hver av dem, så er f integrerbar på unionen $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k$ og

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x, y)\, dA$$

Middelverdier

Sekantsetningen. Dersom f er deriverbar på $[a, b]$, så finnes et tall $a < c < b$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bestemte integraler. Dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$, så finnes $a < c < b$ slik at

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dobbeltintegraler. (Teorem 14.3) Dersom $f(x, y)$ er kontinuerlig på en lukket, begrenset og *sammenhengende* mengde D, så finnes det et punkt (x_0, y_0) i D slik at

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\mathrm{areal}(D)} \iint_D f(x, y)\, dA.$$