TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 2

Ole Brevig

Institutt for matematiske fag

Nøkkelbegreper — Uke 3

- Vektorvaluerte funksjoner av én variabel
  - Deriverbarhet
  - Derivasjonsregler: produktregler og kjerneregelen
- Kurver gitt ved vektorvaluert funksjon
  - Glatte kurver
  - Buelengden til kurver
  - Enhetstangentvektor og enhetsnormalvektor
  - Krumning til kurver

NTNU

Teorem 11.1

La **u** og **v** være to deriverbare vektorvaluerte funksjoner, og la λ være en deriverbar skalarfunksjon. Da gjelder:

(a) $$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)\right)=\mathbf{u}'(t)+\mathbf{v}'(t)$$

(b) $$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\mathbf{u}(t)\right)=\lambda'(t)\mathbf{u}(t)+\lambda(t)\mathbf{u}'(t)$$

(c) $$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\right)=\mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$$

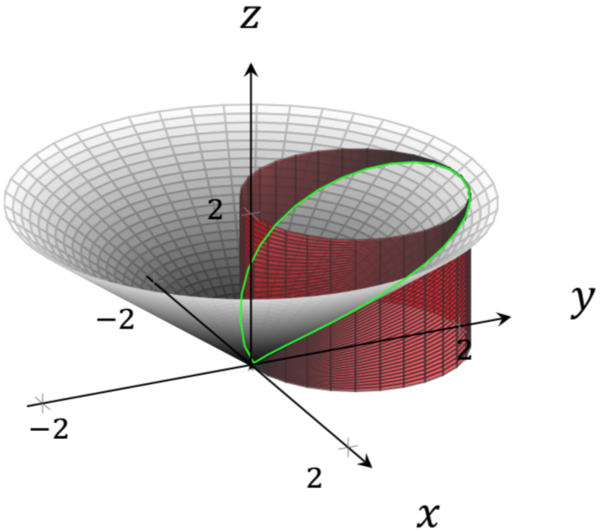
(d) $$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\right)=\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$$ (bare i $\mathbb{R}^3$)

(e) $$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\lambda(t))=\mathbf{u}'(\lambda(t))\lambda'(t)$$

(f) $$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)|=\frac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|}$$ (dersom $\mathbf{u}(t)\neq 0$)

NTNU

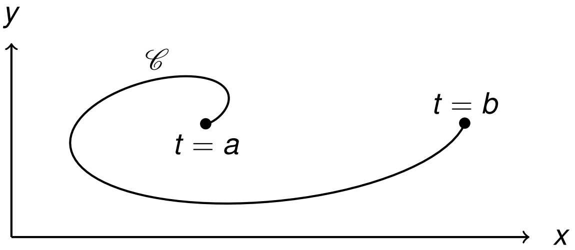
$\boxed{\text{U}}$ La $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom flatene $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Finn en parameterfremstilling for $\mathcal{C}$.



OF1 — Buelengde av parametriserte kurver

La $\mathscr{C}$ være kurven parametrisert ved

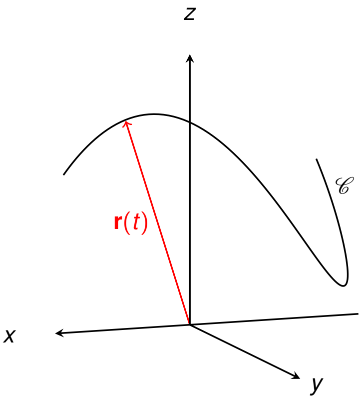
$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad a \leq t \leq b.$$



Buelengden av $\mathscr{C}$ er gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt.$$

Buelengde



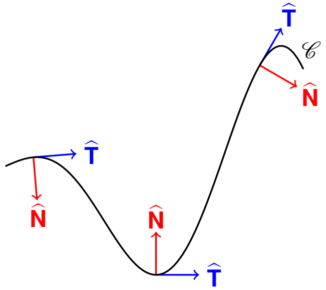
La $\mathscr{C}$ være kurven gitt ved parametriseringen $\mathbf{r}(t)$ der $t \in [a, b]$. Buelengden er

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b v(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Enhetstangent, krumning og enhetsnormal

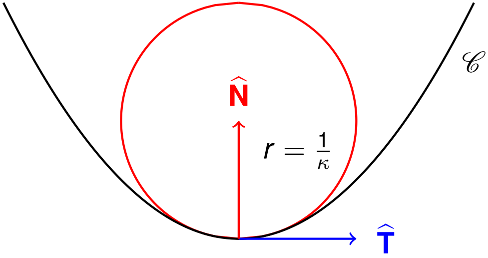
La $\mathbf{r}(t)$ være en glatt parametrisering med $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$. Da er:

- enhetstangenten gitt ved $\widehat{\mathbf{T}}(t) = \dfrac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$
- krumningen gitt ved $\kappa(t) = \dfrac{|\widehat{\mathbf{T}}'(t)|}{v(t)}$
- hvis $\kappa(t) \neq 0$ så er enhetsnormalen gitt ved $\widehat{\mathbf{N}}(t) = \dfrac{\widehat{\mathbf{T}}'(t)}{|\widehat{\mathbf{T}}'(t)|}$



Smygsirkel (Osculating circle)

Smygsirkelen til en kurve i et punkt er sirkelen som skjærer kurven i punktet og som har samme enhetstangent, enhetsnormal og krumning som kurven i punktet.



I $\mathbb{R}^3$ ligger smygsirkelen i smygplanet, som spennes ut av $\widehat{\mathbf{T}}$ og $\widehat{\mathbf{N}}$.

- Normalvektoren til smygplanet, $\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{T}} \times \widehat{\mathbf{N}}$, kalles binormalen.
- Koordinatsystemet $(\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{N}}, \widehat{\mathbf{B}})$ kalles Frenet-rammen.