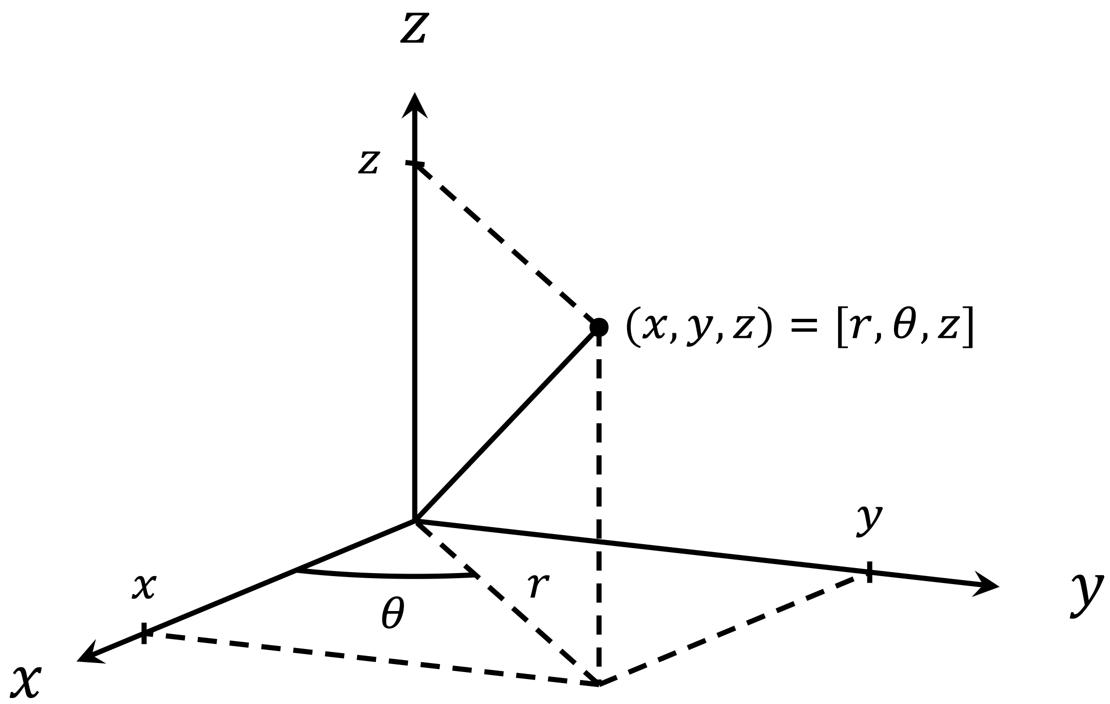
Nøkkelbegreper – uke 9

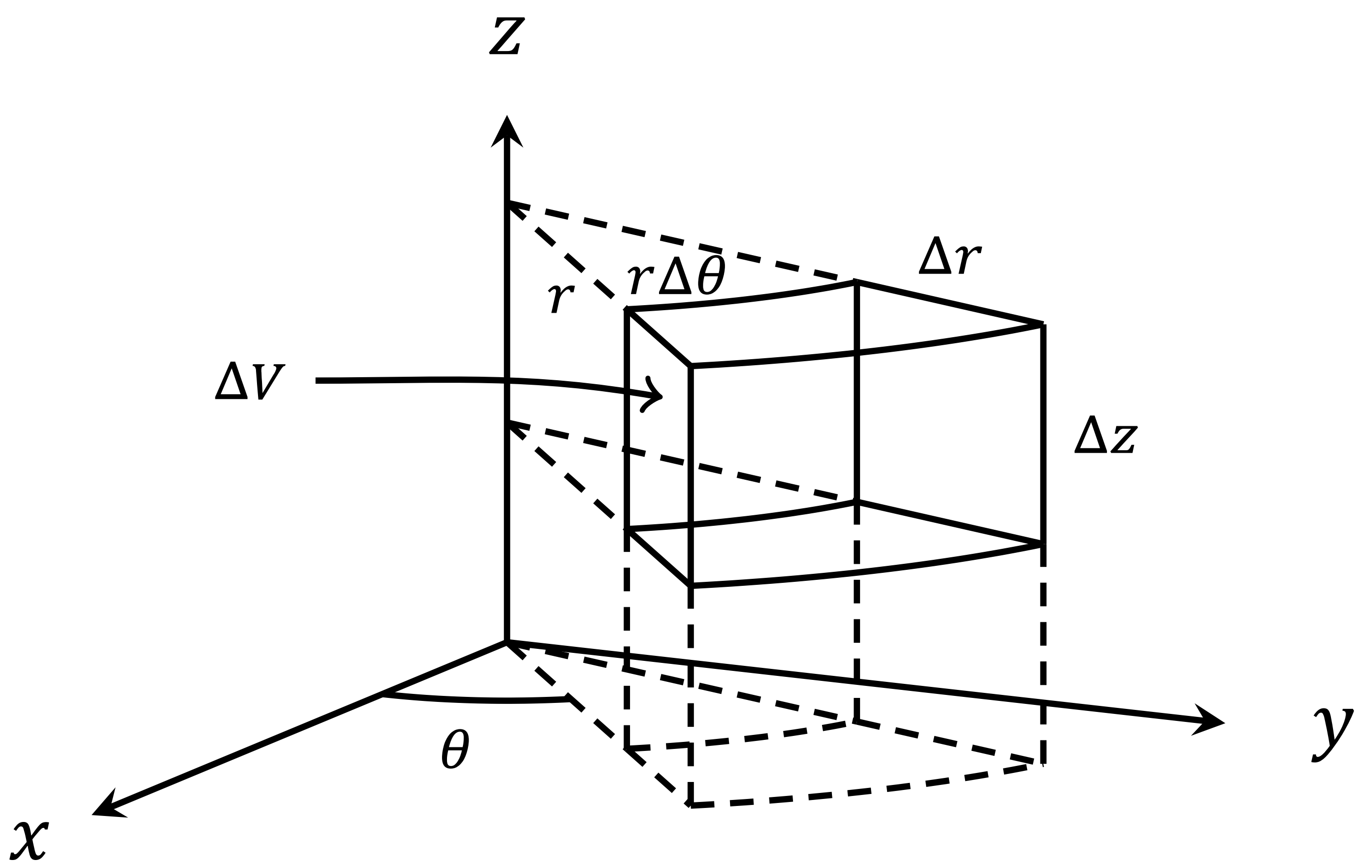
- Variabelskifte for trippelintegraler
  - kulekoordinater, sylinderkoordinater og kartesiske koordinater (volumelementet dV) gitt ved kulekoordinater, sylinderkoordinater og kartesiske koordinater
  - gjennom alminnelige transformasjoner (jacobimatrise, jacobideterminant)
- Massesenter

Sylinderkoordinater



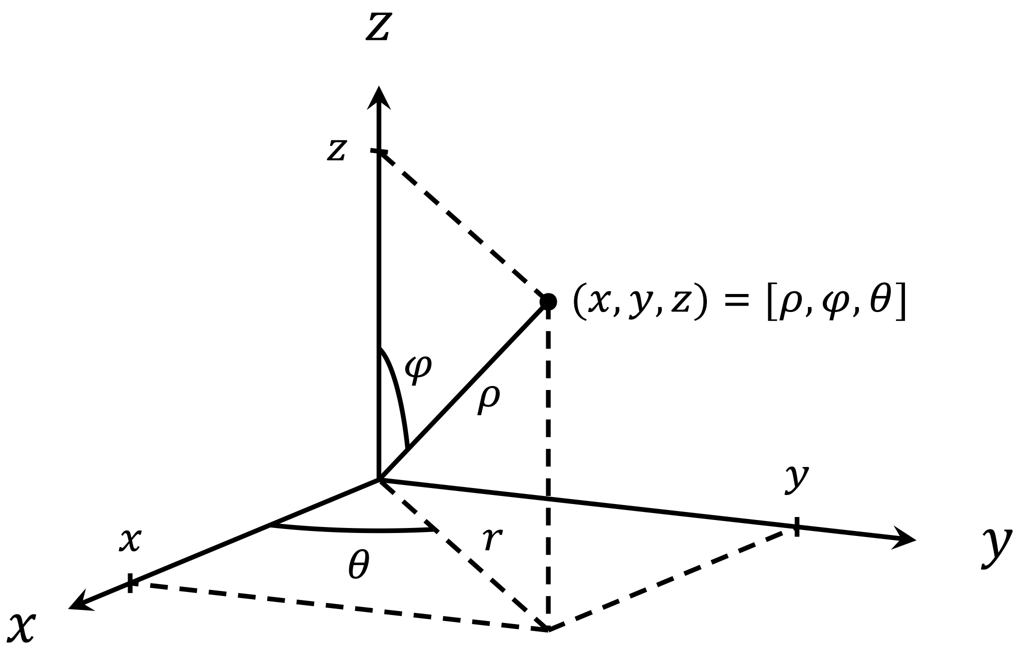
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Volumelement i sylinderkoordinater



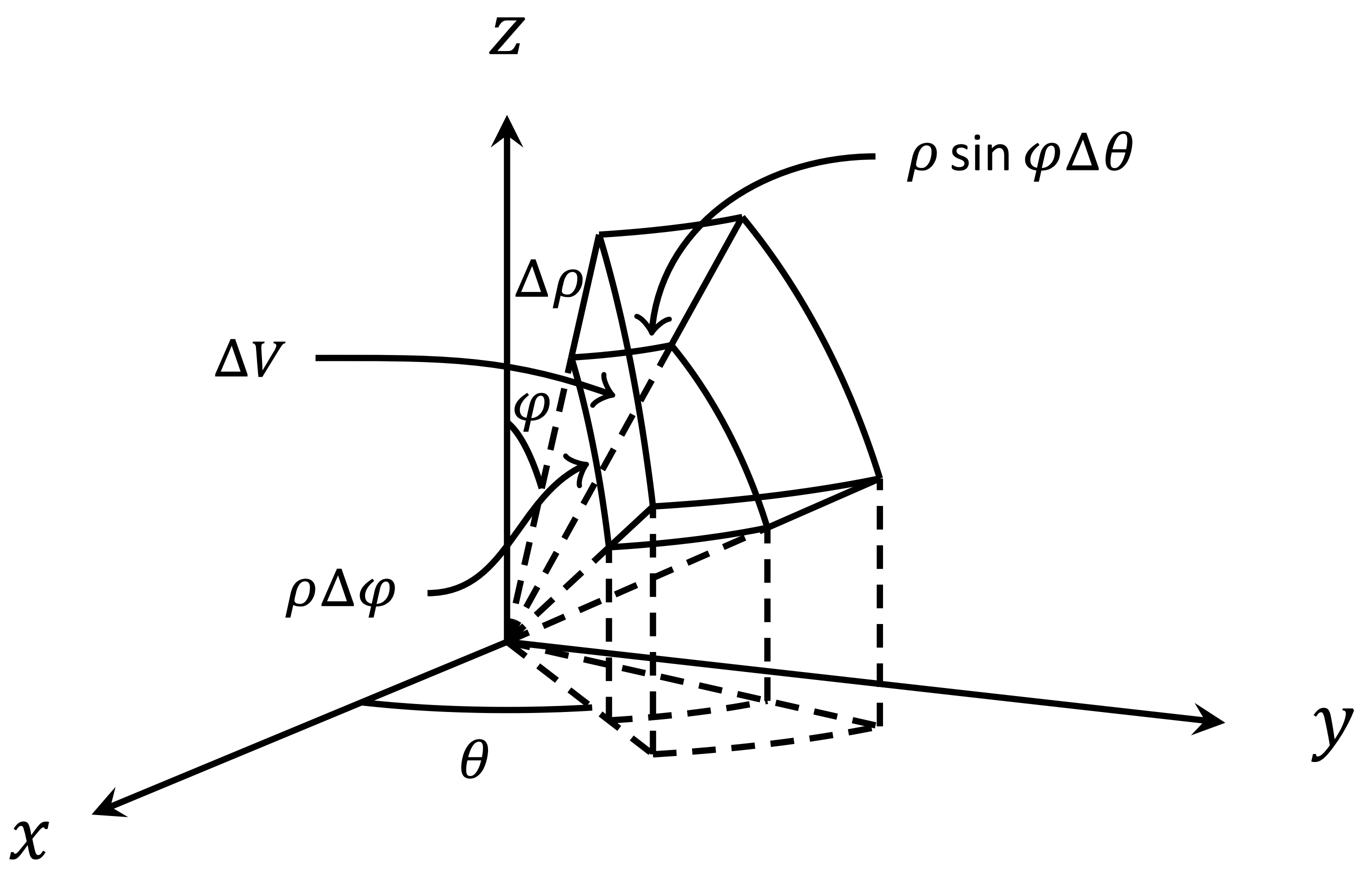
$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater



$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

Volumelement i kulekoordinater



$$dV = \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Skifte av variable i trippeltintegral

La $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ være en én-entydig koordinattransformasjon fra et område S i uvw-rommet til et område D i xyz-rommet.

Anta at $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ og $z(u, v, w)$ og deres første ordens partiellderiverte med hensyn på u, v og w, er kontinuerlig på S. Hvis $f(x, y, z)$ er integrerbar på D og

$$g(u, v, w) = (f \circ T)(u, v, w) = f(T(u, v, w)) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

så er g integrerbar på S og

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S g(u, v, w) |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw,$$

der

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix}.$$

Massesenter

Massen til et legeme T med massetetthetsfunksjon δ er gitt ved

$$m = \iiint_T dm = \iiint_T \delta \, dV, \qquad dm = \delta \, dV.$$

Massesenteret til T er punktet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$, der

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \, dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y \, dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z \, dm.$$