TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 7

Ole Brevig

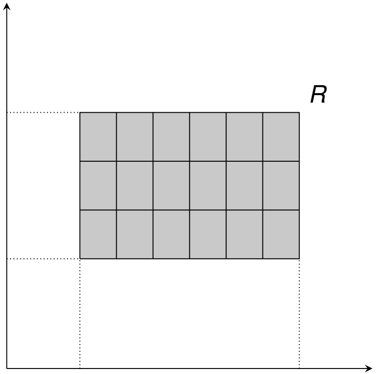
Institutt for matematiske fag

Nøkkelbegreper — Uke 8

- Variabelskifte for dobbeltintegraler
  - Dobbeltintegraler i polarkoordinater
  - Jacobi-determinanten
- Trippelintegraler

OF6 — Riemann-summer for dobbeltintegraler

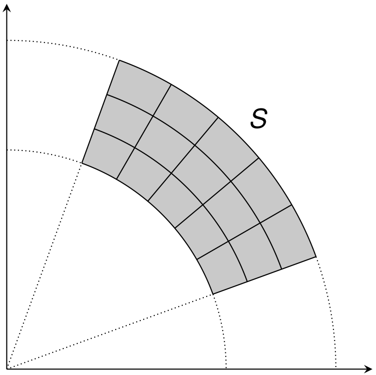
For en partisjon P av rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$ er $\Delta A_{ij} = \text{areal}(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$.



$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A_{ij} = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy dx.$$

Riemann-summer for polarkoordinater

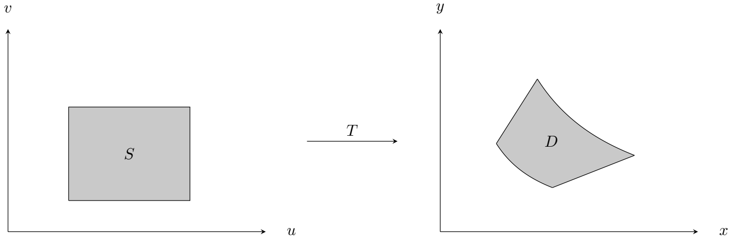
For en av partisjon P av $S = [\varrho_1, \varrho_2] \times [\alpha, \beta]$ i polarkoordinater er $\Delta A_{ij} = \text{areal}(S_{ij}) = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \Delta r_i \Delta \theta_j$.



$$\iint_S f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(r_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, r_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*\right) \Delta A_{ij} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta)\, r dr d\theta.$$

Variabelskifte for dobbeltintegraler

La $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ være en én-entydig koordinattransformasjon fra et område S i uv-planet til et område D i xy-planet.



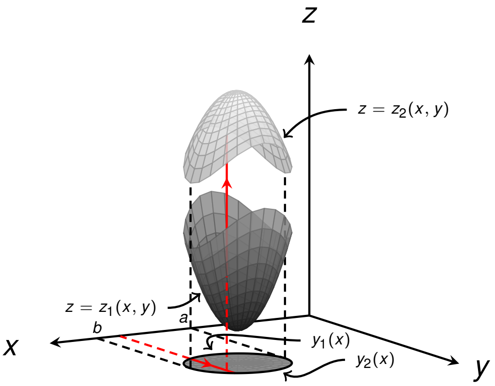
Anta at $x(u, v)$ og $y(u, v)$ og deres første ordens partiellderiverte med hensyn på u og v er kontinuerlige på S. Hvis $f(x, y)$ er integrerbar på D og

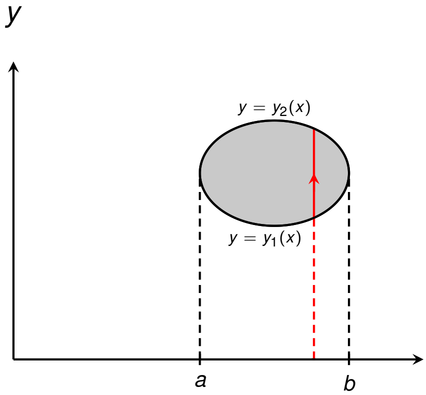
$$g(u, v) = (f \circ T)(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

så er g integrerbar på S og

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_S g(u, v)|J(u, v)|\, dudv \qquad \text{der} \qquad J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Trippelintegraler





$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx.$$