TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 5

Ole Brevig

Institutt for matematiske fag

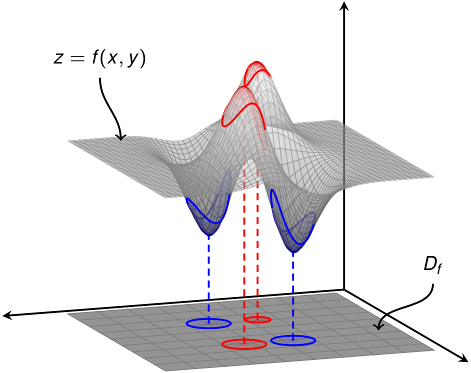
Nøkkelbegreper — Uke 6

- Lokale maksimums- og minimumspunkter for funksjoner av flere variable
- Sadelpunkter for funksjoner av flere variable
- Kritiske punkter for funksjoner av flere variable
- Singulære punkter for funksjoner av flere variable
- Nødvendige betingelser for ekstremalverdier
- Ekstremalverdisetningen
- Annenderiverttesten i to variable
- Lagranges multiplikatormetode

Lokale ekstremalverdier

La $f(x, y)$ være en funksjon av to variable. Vi sier at $(a, b) \in D_f$ er et

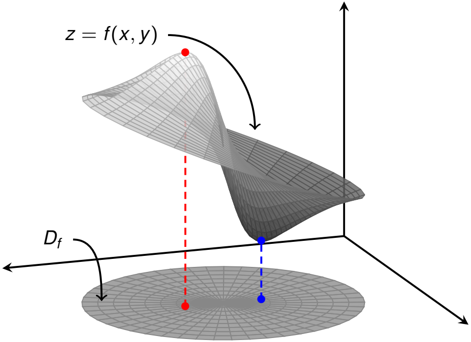
- *lokalt maksimumspunkt* dersom $f(a, b) \geq f(x, y)$ for alle $(x, y) \in D_f$ i nærheten av (a, b).
- *lokalt minimumspunkt* dersom $f(a, b) \leq f(x, y)$ for alle $(x, y) \in D_f$ i nærheten av (a, b).



Globale ekstremalverdier

La $f(x, y)$ være en funksjon av to variable. Vi sier at $(a, b) \in D_f$ er et

- *globalt maksimumspunkt* dersom $f(a, b) \geq f(x, y)$ for alle $(x, y) \in D_f$.
- *globalt minimumspunkt* dersom $f(a, b) \leq f(x, y)$ for alle $(x, y) \in D_f$.



Annenderiverttesten i to variable

La $f(x, y)$ være en funksjon av to variable. Anta at $(a, b) \in D_f$ er et indre kritisk punkt og at de annenderiverte er kontinuerlige i nærheten av (a, b). Sett

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

og

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Da gjelder:

(1) Hvis $\mathscr{D} < 0$, så er (a, b) et sadelpunkt.

(2) Hvis $\mathscr{D} > 0$ og $A > 0$, så er (a, b) et lokalt minimumspunkt.

(3) Hvis $\mathscr{D} > 0$ og $A < 0$, så er (a, b) et lokalt maksimumspunkt.

Hvis $\mathscr{D} = 0$ gir testen ingen konklusjon.

NTNU

Lagranges multiplikatormetode

La f og g være kontinuerlige funksjoner av to variabler og la $\mathscr{C}$ betegne kurven i planet definert ved $g(x, y) = 0$.

La (a, b) være et punkt på $\mathscr{C}$. Anta at

- f og g har kontinuerlige partiellderiverte i nærheten av (a, b),
- (a, b) er ikke et endepunkt av $\mathscr{C}$ og $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$,
- (a, b) er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt for f restriktert til $\mathscr{C}$.

Da finnes det et tall λ_* slik at (a, b, λ_*) er et kritisk punkt til Lagrange-funksjonen

$$\mathscr{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$