TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 4

Ole Brevig

Institutt for matematiske fag

Nøkkelbegreper — Uke 5

- Kjerneregel for funksjoner av flere variabler
- Lineær approksimasjon
- Deriverbarhet for funksjoner av flere variabler
- Gradient og retningsderivert
- Implisitt funksjonsteorem

Kjerneregler

Hvis z er en funksjon av x og y med kontinuerlige første ordens partiellderiverte, og dersom x og y er deriverbare funksjoner av t, så er:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Hvis z er en funksjon av x og y med kontinuerlige første ordens partiellderiverte, og dersom x og y avhenger av r og s, så er:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Lineær approksimasjon

(Matematikk 1) Tangenten til grafen $y = f(x)$ i punktet $(a, f(a))$ er gitt ved:

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

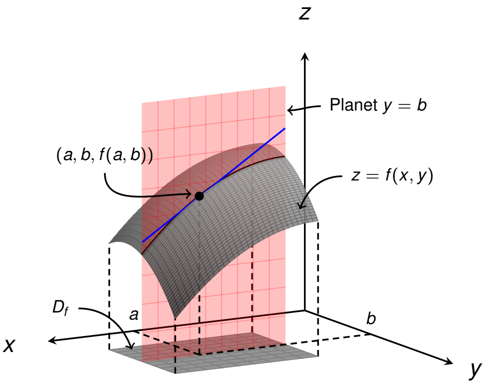
(OF3) Tangentplanet til grafen $z = f(x, y)$ i punktet $(a, b, f(a, b))$ er gitt ved:

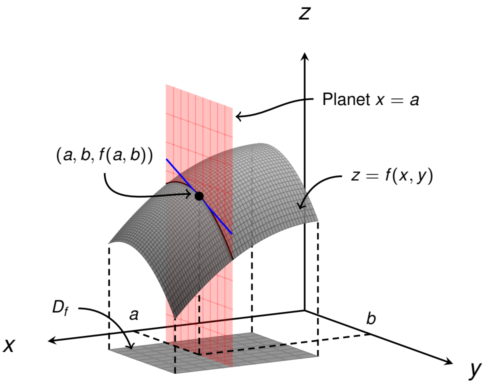
$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b)$$

Lineæriseringen av $f(\mathbf{x})$ i punktet $\mathbf{a} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ er gitt ved:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \big(\mathbf{x} - \mathbf{a}\big)$$

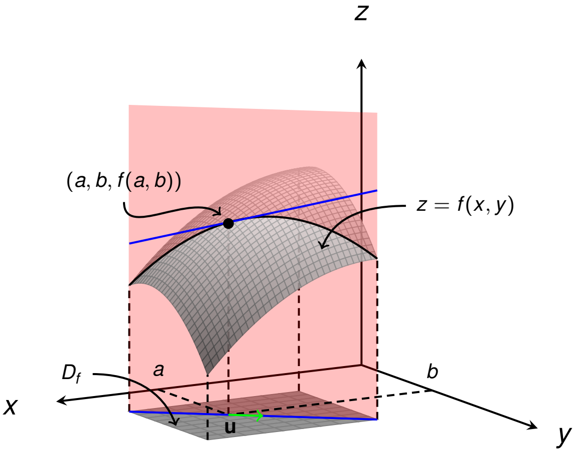
OF3 — Partiellderivasjon





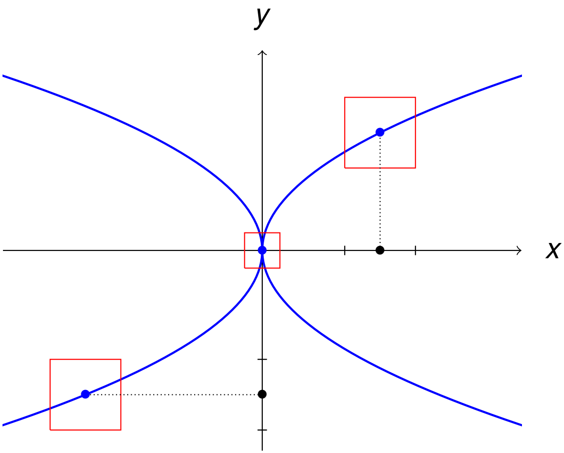
$$D_{\mathbf{i}} f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad D_{\mathbf{j}} f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Retningsderivert



$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\,\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Implisitte funksjoner



$$f(x, y) = x^2 - y^4 = 0$$

Implisitt funksjonsteorem i $\mathbb{R}^2$

La D være en åpen delmengde av $\mathbb{R}^2$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}$ være en funksjon av variablene x og y med kontinuerlige partiellderiverte.

Anta at punktet $(a, b) \in D$ oppfyller $f(a, b) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Da finnes det en deriverbar funksjon $g\colon A \to \mathbb{R}$, hvor A er intervallet $(a - \varrho, a + \varrho)$ for en $\varrho > 0$, som oppfyller $g(a) = b$ og

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Den deriverte er

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Implisitt funksjonsteorem i $\mathbb{R}^{n+1}$

La D være en åpen delmengde av $\mathbb{R}^{n+1}$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}$ være en funksjon av variablene $\mathbf{x}$ og y med kontinuerlige partiellderiverte.

Anta at punktet $(\mathbf{a}, b) \in D$ oppfyller $f(\mathbf{a}, b) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$.

Da finnes det en deriverbar funksjon $g\colon A \to \mathbb{R}$, hvor $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varrho\}$ for en $\varrho > 0$, som oppfyller $g(\mathbf{a}) = b$ og

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

De partiellderiverte er

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}.$$