



NTNU

Kunnskap for en bedre verden

TMA4105 Matematikk 2 — Oversiktsforelesning 3

Ole Brevig

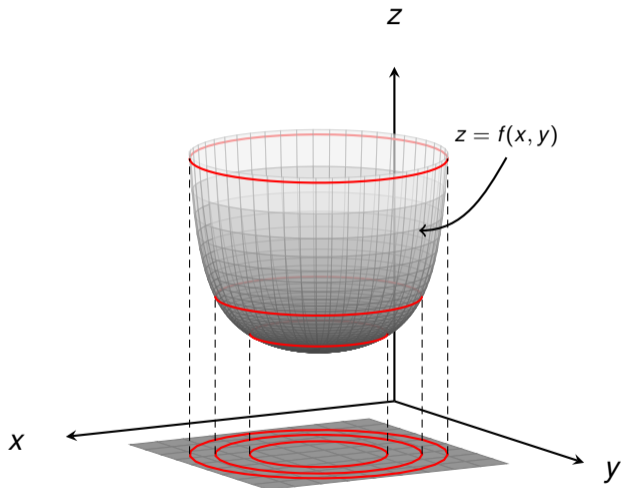
Institutt for matematiske fag



Nøkkelbegreper — Uke 4

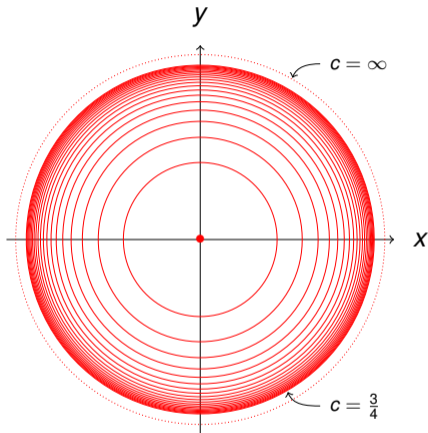
- Funksjoner av flere variable
- Nivåkurver og nivåflater
- Grenseverdi
- Kontinuitet
- Partiellderivasjon
- Kvadratiske flater

Nivåkurver



For et tall $c \in V_f$ er kurven $f(x, y) = c$ i xy -planet nivåkurven til f i høyde c .

Nivåkurver



Nivåkurver for $c = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ med $\Delta c = \frac{1}{40}$ fra $c = \frac{1}{4}$.



Definisjon av grenseverdi

Vi sier at L er *grenseverdien* til funksjonen $f(x, y)$ i punktet (a, b) , og skriver

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L,$$

dersom det

- (i) for hver $\varrho > 0$ finnes det minst ett punkt $(x, y) \in D_f$ som oppfyller $0 < |(x, y) - (a, b)| < \varrho$.
- (ii) for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at dersom $(x, y) \in D_f$ og $0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta$ så er $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.



Regneregler for grenseverdier

Anta at $f(x, y) \rightarrow L$ og $g(x, y) \rightarrow M$ når $(x, y) \rightarrow (a, b)$. Da er:

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \pm g(x, y) = L \pm M$$

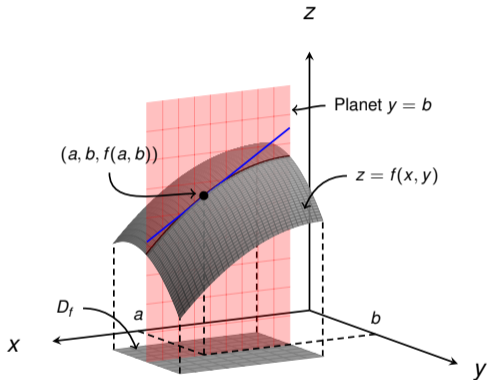
$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = LM$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

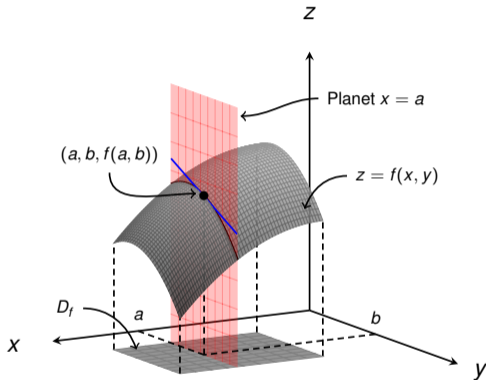
Dersom F er en funksjon av én variabel som er kontinuert, så er:

$$(4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} F(f(x, y)) = F(L)$$

Partiellderivasjon

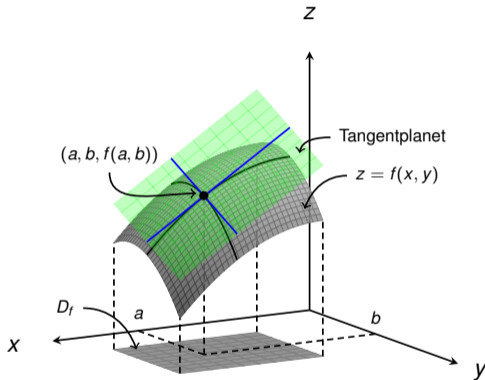
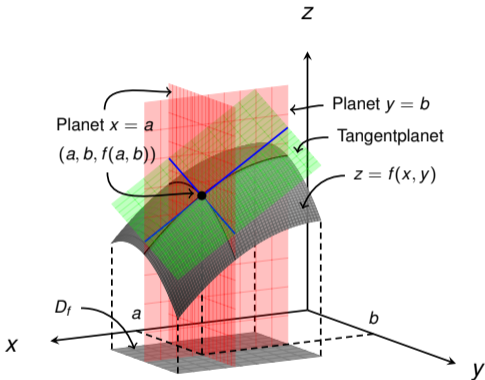


$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$



$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Tangentplan



$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$