Nøkkelbegreper – uke 13

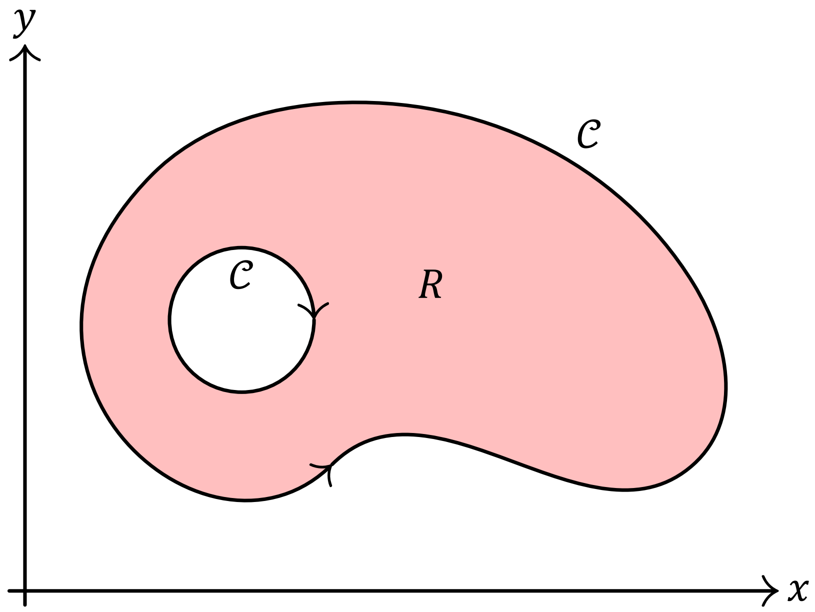
- Divergensteoremet i planet
- Divergensteoremet

Greens teorem

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $C = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

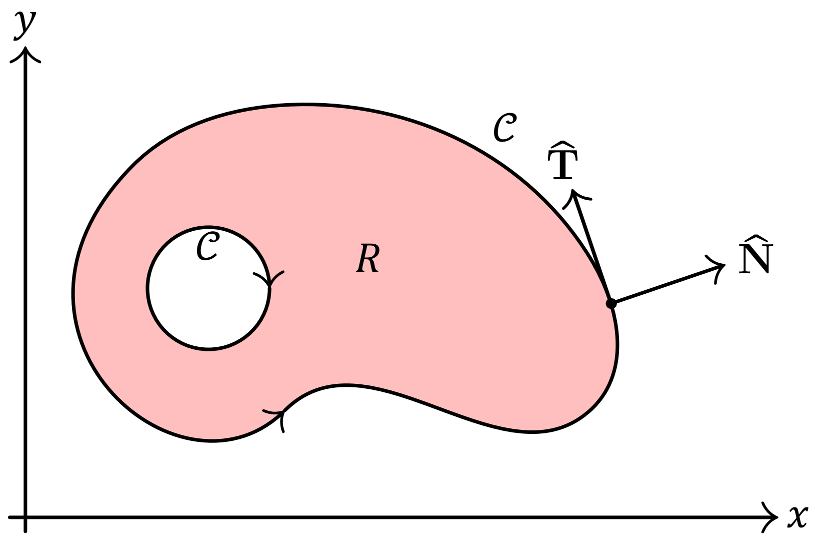


Divergensteoremet i planet

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $C = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$



Divergensteoremet

La D være et regulært område i $\mathbb{R}^3$ hvis rand $S = \partial D$ er en orientert og lukket flate, der enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ peker ut av D.

Hvis $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt som er definert på D, så er

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Eksempel: Bruk av divergensteoremet

La T være området som ligger innenfor torusen $z + (r-2)^2 = 1$ og over kjeglen $z = r - 1$.

La $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - y, yz + x, x^2 + y^2)$, der $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, og la $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalen til ∂T som peker vekk fra T.

Da er

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{r-1}^{\sqrt{1-(r-2)^2}} 2zr \, dz \, dr \, d\theta = \pi.$$