Nøkkelbegreper – uke 12

- Divergensen til et vektorfelt
- Curlen til et vektorfelt
- Vektorpotensial
- Greens teorem

Divergensen til et vektorfelt

Divergensen til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

der $(x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, er definert ved

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Curlen til et vektorfelt

Curlen til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

der $(x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, er definert ved

$$\begin{aligned} &\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z), \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \right). \end{aligned}$$

Curlen til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

der $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, er definert ved

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y) = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right).$$

Eksempel: Curlen til et vektorfelt i planet

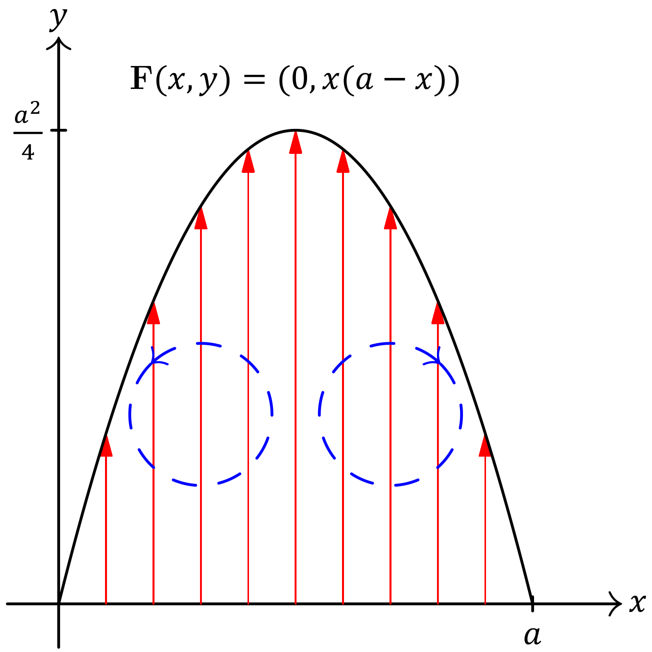
La

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, x(a - x)),$$

der $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, hvor $a > 0$.

Curlen til $\mathbf{F}$ er så gitt ved

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y) = (0, 0, a - 2x)\,.$$



Teorem: Regneregler for $\mathbf{div}$ og $\mathbf{curl}$

(a) $\quad \nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

(b) $\quad \nabla \cdot (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(c) $\quad \nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{F} + \varphi(\nabla \times \mathbf{F})$

(d) $\quad \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(e) $\quad \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

(f) $\quad \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(g) $\quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(h) $\quad \nabla \times (\nabla\varphi) = (0, 0, 0)$

(i) $\quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

Vektorpotensial

La $\mathbf{F}(x, y, z)$ være et glatt vektorfelt definert på et område $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Anta at det finnes et vektorfelt $\mathbf{G}(x, y, z)$ definert på D slik at

$$\operatorname{curl} \mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z).$$

Da er

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0.$$

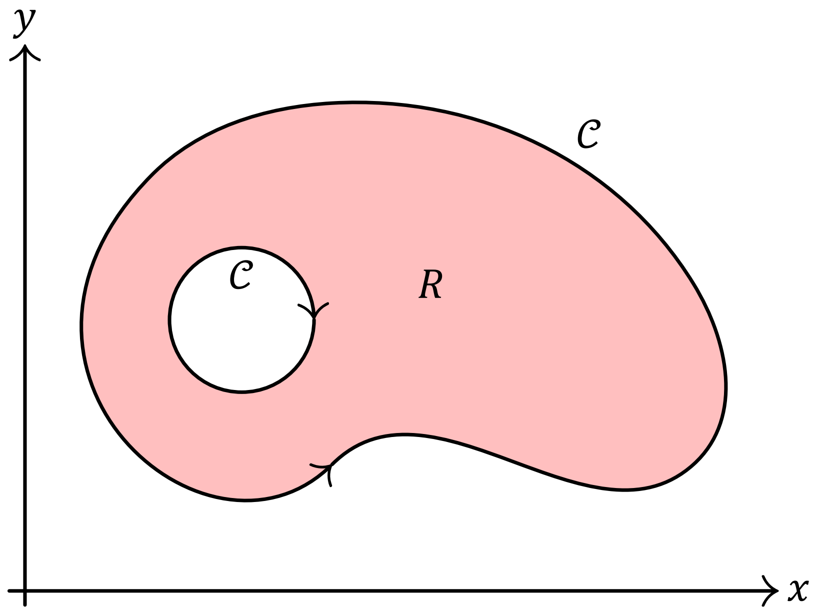
Vi sier da at $\mathbf{G}$ er et vektorpotensial for $\mathbf{F}$.

Greens teorem

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $C = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$



Divergensteoremet i planet

La R være et regulært, lukket område i xy-planet hvis rand, $\mathcal{C} = \partial R$, består av en eller flere stykkevis glatte, enkle lukkede kurver som er positivt orientert med hensyn på R.

Hvis $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ er et glatt vektorfelt definert på R, så er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$