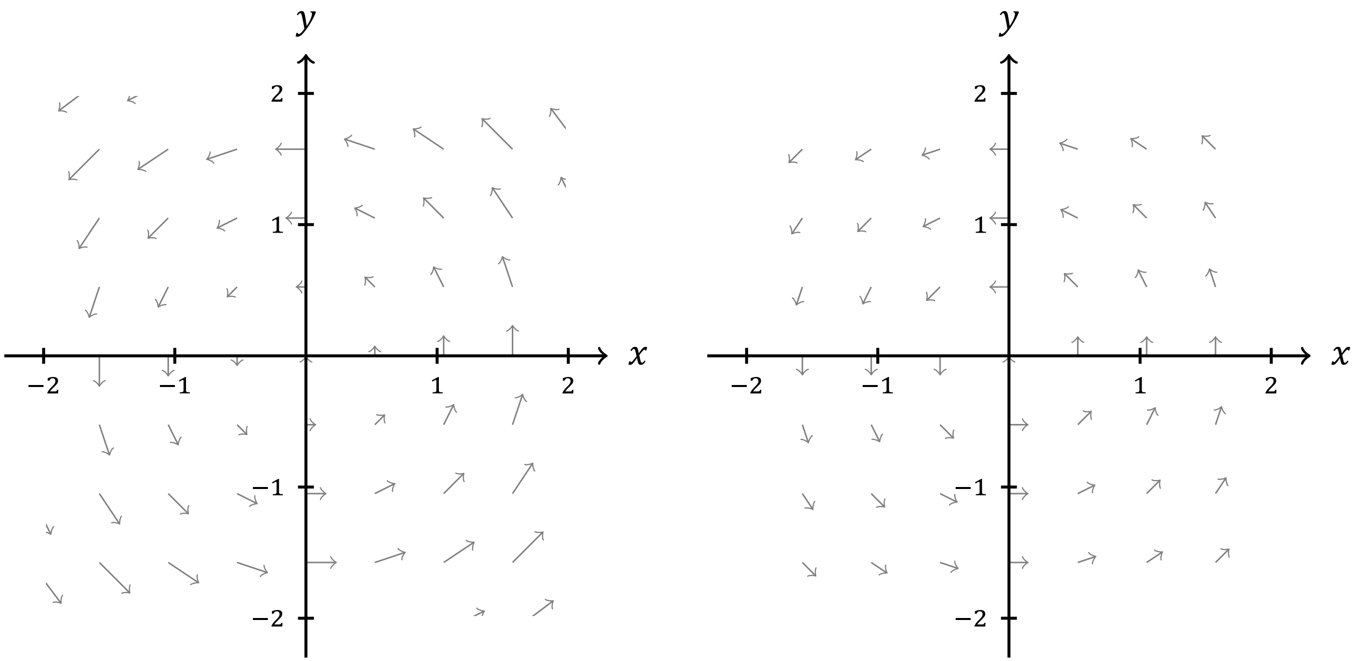
Nøkkelbegreper – uke 10

- Vektorfelt
- Konservative vektorfelt
- Linjeintegral for funksjoner (skalarfelter)
- Linjeintegral for vektorfelter

Vektorfelt

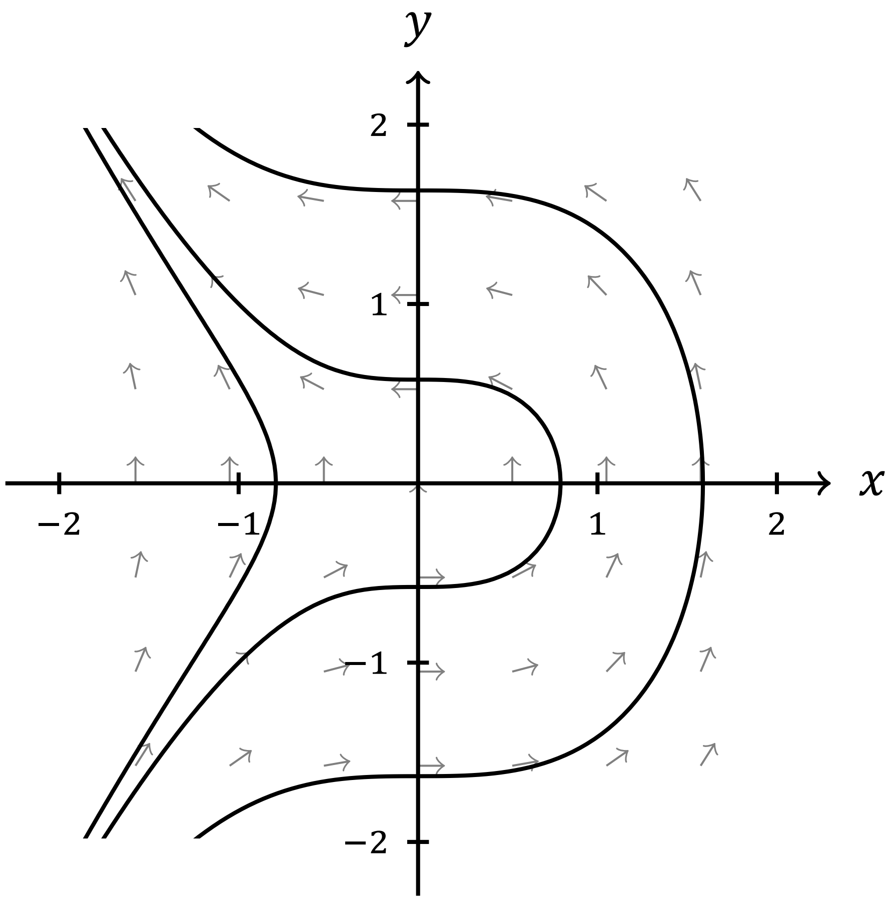


$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

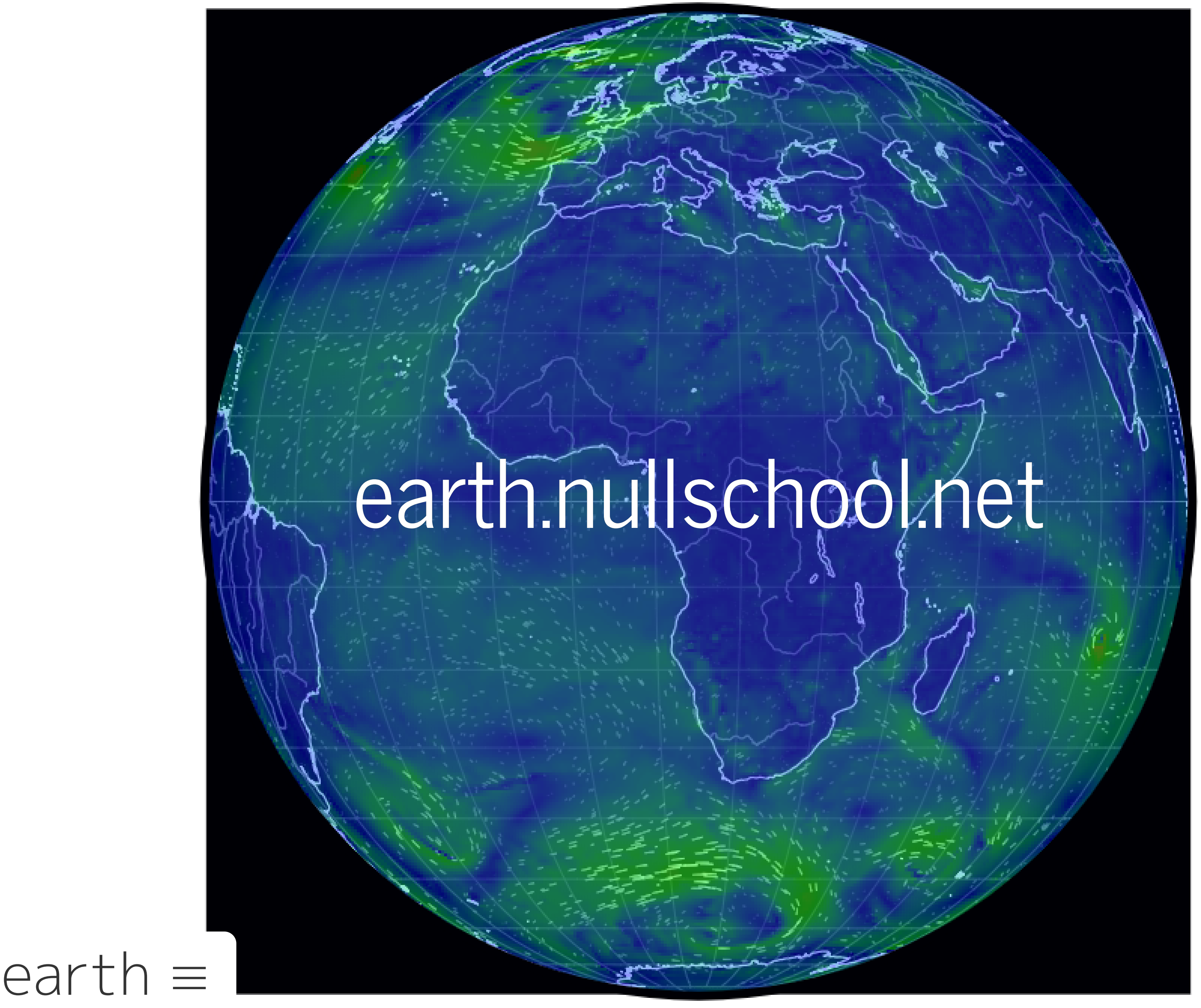
En funksjon $\mathbf{F}$ fra (en delmengde av) $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$ kalles et vektorfelt.

En funksjon f fra (en delmengde av) $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$ kalles av og til for et skalarfelt.

Strømningslinjer



$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$


earth.nullschool.net
earth

Konservative vektorfelt

Et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

definert på et område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ er konservativt hvis det finnes en potensialfunksjon $\varphi(x, y, z)$ slik at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$$

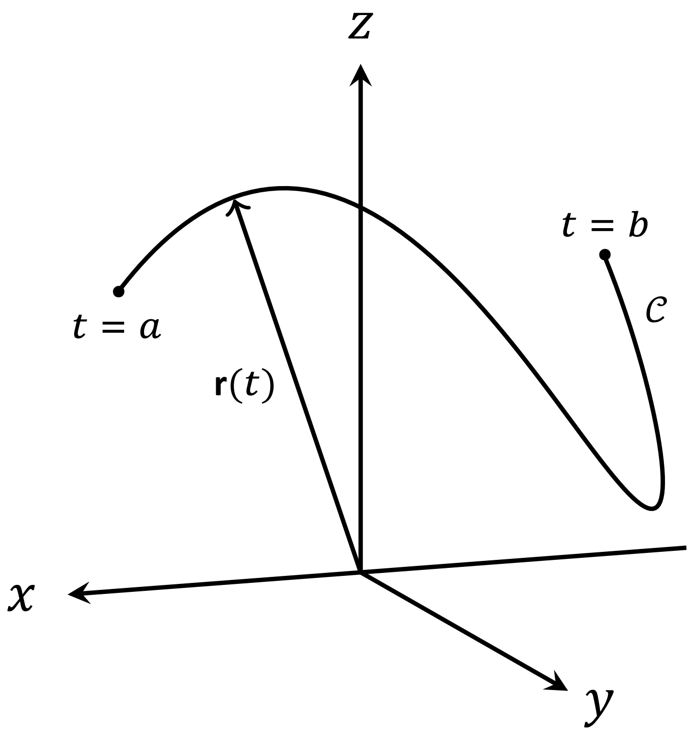
for alle punkter $(x, y, z) \in D$.

Hvis vektorfeltet $\mathbf{F}$ er konservativt må det oppfylle

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z), \qquad \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z)$$

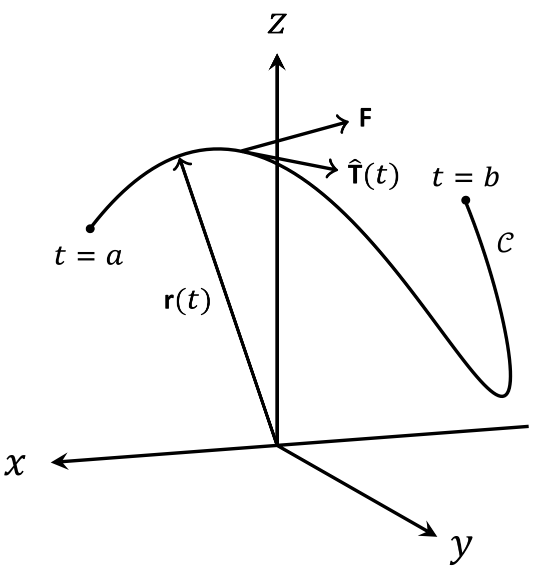
for alle $(x, y, z) \in D$.

Linjeintegral for funksjoner (skalarfelter)



$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Linjeintegral for vektorfelter



$$\int_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

Teorem

La D være en åpen, sammenhengende delmengde av $\mathbb{R}^n$, og la $\mathbf{F}$ være et glatt vektorfelt i D.

Da er følgende utsagn ekvivalent:

(1) $\mathbf{F}$ er konservativt i D.

(2) $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle stykkevis glatte, lukkede kurver C i D.

(3) Linjeintegralet $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ er uavhengig av veien mellom start- og sluttpunktet.