Anbefalte oppgaver uke 9

Våren 2019

Løsningsforslag

$\boxed{14.5.7}$ Vi har at $\iiint_R xy\, dV = 0$, siden integranden er odde og integrasjonsområdet er symmetrisk om origo. Det følger at

$$\begin{aligned} I &= \iiint_R (xy + z^2)\, dV \\ &= \iiint_R z^2\, dV \\ &= 4\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^2\, dz\, dy\, dx, \end{aligned}$$

der faktoren 4 kommer fra at vi utnytter symmetrien til å kun integrere over den delen av integrasjonsområdet som ligger i første kvadrant. Vi får:

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^3\, dy\, dx \\ &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^1 \left[(1-x-y)^4\right]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^4\, dx \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

$\boxed{14.5.15}$ Vi skal evaluere integralet

$$I = \iiint_T x\, dV,$$

hvor T er tetraederet avgrenset av planene $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, og $x + y + z = 2$. Området T er gitt ved ulikhetene $0 \leq x \leq 1$, $1 - x \leq y \leq 1$, og $2 - x - y \leq z \leq 1$. Dermed er

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_{2-x-y}^1 x\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 x\, [z]_{2-x-y}^1\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 x(x+y-1)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 x\left[xy + \frac{1}{2}y^2 - y\right]_{1-x}^1 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left((1-x)^2 + 2x - 1\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$\boxed{14.6.7}$ Me skal finna volumet V av området S som ligg i første oktant, mellom plana $y = 0$ og $y = x$ og inni ellipsoiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Her kan me godt anta $a, b, c > 0$ sidan det er kvadrata av desse som inngår, og dermed vil svaret vera uavhengig av forteikna deira. Me følgjer først hintet i oppgåva og brukar variabelskiftet i Example 1 side 850, $x = au, y = bv, z = cw$ og dermed er $dV = abc\, du\, dv\, dw$. I det nye koordinatsystemet har ellipsen blitt ei sfære med radius 1, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, medan plana er gitt av $v = 0$ og $v = \frac{a}{b}u$. Lat oss kalla området i dei nye koordinata for T. Ved å skissera korleis T ser ut i uv-planet ser ein at vinkelen mellom plana er gitt ved $\theta = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$. Om ein no skiftar til kulekoordinat ($u = R\cos\theta\sin\phi$, etc.) ser ein at området vårt kan skrivast som $0 \le R \le 1$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ og $0 \le \theta \le \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$. Dermed vert volumet av S

$$V = \iiint_S dV = abc \iiint_T du\, dv\, dw = abc \int_0^{\arctan(a/b)} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta$$

$$= abc\, [\theta]_0^{\arctan(a/b)} \times [-\cos\phi]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{R^3}{3}\right]_0^1 = \frac{abc}{3} \arctan\left(\frac{a}{b}\right).$$

Alternativt til å gjera to koordinatskifte kunne me merka oss at T i uvw-koordinat er eit vinkelsegment (eller som eit kakestykke om du vil) av øvre halvdel av ei kule med radius 1. Volumet av halvkula er $\frac{4\pi 1^3}{3}/2 = \frac{2\pi}{3}$ og vinkelsegmentet utgjer $\frac{\arctan(a/b)}{2\pi}$ av halvkula. Skalert med Jacobi-determinanten abc frå uvw-koordinatskiftet finn ein då at volumet er $V = abc \times \frac{2\pi}{3} \times \frac{\arctan(a/b)}{2\pi} = \frac{abc}{3} \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$, som ovanfor.

$\boxed{14.6.10}$ Siden vi integrerer over en sylinder, lønner det seg å bruke sylinderkoordinater. I sylinderkoordinater er integrasjonsområdet gitt ved $0 \le r \le |a|$, $0 \le z \le h$, mens integranden blir $r^2 + z^2$. Ved å bruke formelen for volumelement i sylinderkoordinater $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$, finner vi at integralet er

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{|a|} \int_0^h \int_0^{2\pi} (r^2 + z^2) r\, d\theta\, dz\, dr \\
&= 2\pi \int_0^{|a|} \int_0^h (r^2 + z^2) r\, dz\, dr \\
&= 2\pi \int_0^{|a|} (hr^2 + \frac{h^3}{3}) r\, dr \\
&= \pi\left(\frac{h|a|^4}{2} + \frac{h^3|a|^2}{3}\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{14.6.15}$ Me skal evaluera integralet

$$\iiint_R z\, dV$$

der R er gitt ved $x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, altså er R området over paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og under kuleflata gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Sidan R er symmetrisk om z-aksen og høgda z er gitt eksplisitt i skildringa av R er det naturleg å bruka sylinderkkoordinat her, sånn at R er gitt ved $r^2 \le z \le \sqrt{2 - r^2}$. For å finna intagrasjonsgrensene for r må me finna når $r^2 = \sqrt{2 - r^2}$, og dette kan me sjå at er når $r = 1$ (eventuelt løysa eit annangradsuttrykk for r^2 om du ikkje ser dette direkte). Dermed har me

$$\begin{aligned}\iiint_R z\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1\left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\,dr\\ &= \pi\int_0^1 (2-r^2-r^4)r\,dr = \pi\left[r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1\\ &= \pi\frac{12-3-2}{12} = \frac{7\pi}{12}.\end{aligned}$$

$\boxed{14.6.16}$ Me skal finna $\iiint_S x\,dV$ og $\iiint_S z\,dV$ der S er gitt av den delen av halvkula $0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ som ligg i første oktant. Frå symmetrien i problemet vil desse to integrala ha same verdi (dette er integralet av avstanden frå origo til eit punkt langs ein av aksane og det er det same om ein vel x- eller z-aksen sidan S ikkje endrar seg om ein roterer koordinatsystemet). Me ser berre på det siste sidan i kulekoordinat er $z = R\cos\phi$ litt enklare enn $x = R\sin\theta\sin\phi$.

$$\begin{aligned}\iiint_S z\,dV &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a R\cos\phi\,R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(2\phi)\,d\phi\int_0^a R^3\,dR = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(2\phi)\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{R^4}{4}\right]_0^a\\ &= \frac{\pi a^4}{16}.\end{aligned}$$

$\boxed{14.7.13}$ Me skal finna massen M til ein sfærisk planet med radius $a > 0$ som har massetettleik $\rho(R) = A/(B+R^2)$ for to positive konstantar A og B i avstand R frå sentrum. For å gjera det enkelt for oss sjølv kan me då seia at planeten har sentrum i origo. Me finn massen ved å integrera massetettleiken over domenet som planeten utgjer, og i denne situasjonen er kulekoordinat det naturlege valet i og med at planeten er sfærisk og ρ berre avhenger av radien R.

$$\begin{aligned}M &= \iiint_{\{|R|\le a\}} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a \frac{A}{B+R^2}R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta\\ &= 2\pi A\,[-\cos\phi]_0^{\pi}\int_0^a\frac{B+R^2-B}{B+R^2}\,dR = 4\pi A\int_0^a 1-\frac{1}{1+(R/\sqrt{B})^2}\,dR\\ &= 4\pi A\left(a-\sqrt{B}\,[\arctan(y)]_0^{a/\sqrt{B}}\right) = 4\pi A\left(a-\sqrt{B}\arctan\left(a/\sqrt{B}\right)\right),\end{aligned}$$

der me har gjort substitusjonen $y = R/\sqrt{B}$.

$\boxed{14.7.18}$ Vi finner først massen, som per definisjon er tetthet integrert over volum.

$$\begin{aligned}M &= \int_0^a\int_0^a\int_0^a \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz\\ &= \int_0^a\int_0^a\left(\frac{1}{3}a^3+ay^2+az^2\right)dy\,dz\\ &= \int_0^a\left(\frac{1}{3}a^4+\frac{1}{3}a^4+a^2z^2\right)dz\\ &= \left(\frac{1}{3}a^5+\frac{1}{3}a^5+\frac{1}{3}a^5\right) = a^5.\end{aligned}$$

Vi finner så $M_{x=0}$, som av symmetri er lik $M_{y=0}$ og $M_{z=0}$.

$$
\begin{aligned}
M_{x=0} &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\,dy\,dz \\
&= \int_0^a \int_0^a \left(\frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{a^2}{2}z^2\right)\mathrm{d}x\,dy \\
&= \frac{a^6}{4} + \frac{a^6}{6} + \frac{a^6}{6} = \frac{7}{12}a^6.
\end{aligned}
$$

Følgelig er

$$
(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{M}\left(M_{x=0}, M_{y=0}, M_{z=0}\right) = \left(\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}\right).
$$

$\boxed{14.7.20}$ På grunn av symmetri må vi ha $\bar{x} = \bar{y} = 0$, slik at det bare gjenstår å beregne $\bar{z}$. Dette gjøres enklest ved å benytte sylinderkoordinater. Vi finner først at

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr \\
&= \pi \int_0^{\infty} e^{-u}\,du = \pi,
\end{aligned}
$$

der vi har brukt substitusjonen $u = r^2$. Vi finner så

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{e^{-(x^2+y^2)}} z\,dz\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{e^{-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\infty} re^{-2r^2}\,dr \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-u}\,du = \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

der vi har brukt substitusjonen $u = 2r^2$.