Anbefalte oppgaver uke 8

Våren 2019

Løsningsforslag

$\boxed{14.4.2}$ Me skal evaluera integralet

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$$

på domenet D gitt av $x^2 + y^2 \leq a^2$, dvs. disken sentrert i origo med radius a. Ved å skifta til polarkoordinat finn me at D er gitt ved $r \leq a$ og integralet vert

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{r^2}\, r\, dr\, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a r^2\, dr\right) = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$\boxed{14.4.6}$ Me skal evaluera integralet

$$\iint_D x^2 y^2\, dA$$

på domenet D gitt av $x^2 + y^2 \leq a^2$, dvs. disken sentrert i origo med radius a. Ved å skifta til polarkoordinat finn me at D er gitt ved $r \leq a$ og integralet vert

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y^2\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (r\cos\theta)^2 (r\sin\theta)^2\, r\, dr\, d\theta = \left(\int_0^a r^5\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\theta)^2\, d\theta\right) \\ &= \frac{a^6}{6}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(2\cos\theta\sin\theta)^2\, d\theta = \frac{a^6}{24}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{a^6}{24}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)\, d\theta \\ &= \frac{a^6}{24}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi a^6}{24}.\end{aligned}$$

$\boxed{14.4.7}$ Vi skal evaluere integralet

$$I = \iint_Q y\, dA,$$

hvor Q er delen av disken $x^2 + y^2 \leq a^2$ som ligger i første kvadrant. I polarkoordinater er området Q gitt ved $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Arealelementet er $dA = r\, dr\, d\theta$, og $y = r\sin\theta$. Vi får dermed

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r\sin\theta r\, dr\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^a r^2\, dr\right) \\ &= \frac{a^3}{3}.\end{aligned}$$

$\boxed{14.4.10}$ Vi skriver integralet i polarkoordinater. Q er området der $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\begin{aligned}
\iint_Q \frac{2xy}{x^2+y^2}dA &= \int_0^a \int_0^{\pi/2} \frac{2(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))}{r^2} r d\theta dr \\
&= \int_0^a \int_0^{\pi/2} r\sin(2\theta) d\theta dr \\
&= \int_0^a r\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} dr \\
&= \frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{14.4.18}$ Vi skriver integralet i polarkoordinater.

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dA}{(1+x^2+y^2)^k} = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^k} r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^k} r\,dr.$$

Vi gjør substitusjonen $u = 1 + r^2$, $du = 2r\,dr$, som gir

$$I = \pi \int_1^\infty \frac{1}{u^k}\,du.$$

Slike p-integraler har vi jobbet med tidligere og en rask utregning gir oss at

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{k-1}, & k > 1, \\ \infty, & k \leq 1. \end{cases}$$

Eksamen vår 2016, oppgave 7: Lenke til løsningsforslag